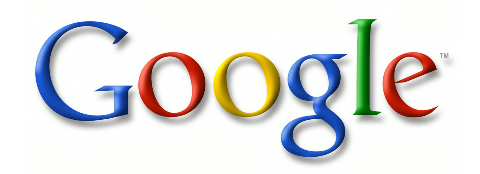










Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

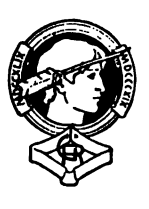
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 128.

Heft I.

Ausgegeben den 10. Oktober.



Berlin,
W. 35 Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1904.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 128.

In vier Heften.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1905.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 128.

Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen.

(Von *K. Hensel.*)

Ich will im Folgenden die Resultate der auf S. 51—84 des vorigen Bandes d. J. veröffentlichten Arbeit „Neue Grundlagen der Arithmetik" (ich werde sie mit G. d. A. zitieren) zur Untersuchung der algebraischen Zahlen für den Bereich einer beliebigen Primzahl p verwenden, und zeigen, daß man im wesentlichen zu denselben Resultaten für dieses größere Gebiet gelangt, wie sie a. a. O. für die rationalen Zahlen gefunden werden. Auf diese Ergebnisse läßt sich, wie dann weiter gezeigt wird, eine Theorie der algebraischen Zahlen gründen, welche vollständig mit der durch *Puiseux* begründeten Theorie der algebraischen Funktionen übereinstimmt, und die auch auf der Untersuchung der algebraischen Einheiten ausgedehnt werden kann, wie in einer späteren Arbeit näher dargelegt werden soll.

§ 1.

Ich erinnere zuerst an einige Definitionen und Elementarsätze über die algebraischen Zahlen und ihre Teilbarkeit durch eine ganze oder gebrochene Potenz einer Primzahl p.

Eine algebraische Zahl α genügt nicht bloß einer, sondern unendlich vielen Gleichungen mit rationalen Zahlkoeffizienten, deren linke Seiten aus der irreduktiblen Gleichung niedrigsten Grades für α

$$(1.)\qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

dadurch hervorgehen, daß man $f(x)$ mit einer beliebigen ganzen Funktion

von x multipliziert. Eine algebraische Zahl α soll *algebraisch ganz für den Bereich von p* genannt werden, wenn irgend eine unter diesen Gleichungen für α

$$(1^a.)\qquad F(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m = 0$$

lauter Koeffizienten A_i besitzt, welche für den Bereich von p ganze Zahlen sind, wenn also alle Koeffizienten A_i rationale Brüche sind, deren Nenner in ihrer reduzierten Form die Primzahl p nicht enthalten. Eine Zahl α heißt also algebraisch ganz für den Bereich von p oder modulo p, wenn sie wenigstens einer (reduktiblen oder irreduktiblen) Gleichung (1^a.) genügt, in der kein einziger Koeffizient eine negative Ordnungszahl hat. Aus dieser allgemeinsten Definition ergeben sich dann leicht die Folgerungen:*)

1. Eine Zahl α ist *dann und nur dann* algebraisch ganz für den Bereich von p, wenn die zugehörige *irreduktible* Gleichung (1.) lauter modulo p ganze Koeffizienten hat.

2. Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier ganzen Zahlen ist wiederum ganz.

3. Jede Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung:

$$y^s + \gamma_1 y^{s-1} + \cdots + \gamma_s = 0,$$

deren Koeffizienten modulo p ganze algebraische Zahlen sind, ist selbst eine modulo p ganze algebraische Zahl.

4. Hieraus folgt speziell, daß eine Zahl α dann und nur dann modulo p algebraisch ganz ist, wenn irgend eine Potenz $\beta = \alpha^s$ von α mit positiven ganzzahligen Exponenten ebenfalls ganz ist.

Alle rationalen Funktionen von α mit beliebigen rationalen Zahlenkoeffizienten bilden den zu α gehörigen Körper $K(1,\alpha)$. Ist β irgend eine Zahl dieses Körpers so genügt diese nebst ihren n konjugierten einer Gleichung n-ten Grades, ihrer „zugehörigen Gleichung", deren linke Seite entweder selbst irreduktibel, oder die Potenz eines irreduktiblen Faktors ist. Hieraus folgt, daß eine Zahl β dann und nur dann modulo p algebraisch ganz ist, wenn die zugehörige Gleichung n-ten Grades:

$$(2.)\qquad g(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

lauter modulo p ganze Koeffizienten besitzt.

---

*) Vgl. z. B. Weber Algebra II. Aufl. Bd. II. § 149.

Ist β eine beliebige Zahl des Körpers $K(1, \alpha)$, so kann man die zugehörige Gleichung durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von p stets auf die „primitive Form:“

$$(2^a.) \qquad \bar{g}(y) = \bar{b}_0 y^n + \bar{b}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{b}_n = 0$$

bringen, in welcher alle Koeffizienten $\bar{b}_k$ modulo p ganz d. h. von nicht negativer Ordnung sind und mindestens einer unter ihnen eine Einheit ist, also p garnicht enthält. Die Zahl β ist dann und nur dann algebraisch ganz, wenn der erste Koeffizient $\bar{b}_0$ eine Einheit modulo p ist. Ich bemerke gleich hier, daß das Produkt $\bar{g}(y) \cdot \bar{h}(y)$ zweier primitiver Funktionen offenbar wieder primitiv ist.

Eine algebraische Zahl β des Körpers $K(1, \alpha)$ ist durch eine ganze oder gebrochene Potenz p^δ von p algebraisch teilbar, wenn der Quotient

$$(3.) \qquad \gamma = \frac{\beta}{p^\delta}$$

eine modulo p ganze algebraische Zahl ist. Genügt $y = \beta$ der Gleichung

$$(4.) \qquad y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n = 0,$$

so genügt $z = \gamma = \frac{\beta}{p^\delta}$ der Gleichung:

$$(4^a.) \qquad z^n + \frac{b_1}{p^\delta} z^{n-1} + \frac{b_2}{p^{2\delta}} z^{n-2} + \cdots + \frac{b_n}{p^{n\delta}} = 0$$

welche aus der obigen durch die Substitution: $y = p^\delta z$ hervorgeht. Es sei allgemein $\mathfrak{b}_i$ die Ordnungszahl des Gleichungskoeffizienten b_i, so daß

$$b_i = p^{\mathfrak{b}_i} e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

und e_i eine rationale Einheit modulo p ist. Dann kann man obige Gleichung für $\frac{\beta}{p^\delta}$ so schreiben:

$$(4^b.) \qquad z^n + p^{\mathfrak{b}_1 - \delta} e_1 z^{n-1} + p^{\mathfrak{b}_2 - 2\delta} e_2 z^{n-2} + \cdots + p^{\mathfrak{b}_n - n\delta} e_n = 0.$$

Ist dann der (ganze oder gebrochene) Exponent δ so gewählt, daß alle Exponenten $(\mathfrak{b}_i - i\delta)$ nicht negative Zahlen sind, ist also

$$\delta \leqq \delta_0$$

wo

$$(5.)\qquad \delta_0 = \mathrm{Min}\left\{\frac{\mathfrak{b}_1}{1}, \frac{\mathfrak{b}_2}{2} \cdots \frac{\mathfrak{b}_i}{i}, \cdots \frac{\mathfrak{b}_n}{n}\right\}$$

die kleinste unter den n Zahlen $\frac{\mathfrak{b}_i}{i}$ bedeutet, so ist die Zahl γ algebraisch ganz, weil sie der Gleichung (4^b.) mit den modulo p ganzen algebraischen Koeffizienten $p^{\mathfrak{b}_i - i\delta} e_i$ genügt; alsdann ist also β durch p^δ algebraisch teilbar.

Ist dagegen $\delta > \delta_0$, so ist in der obigen Gleichung (4^b.) für γ mindestens einer der Koeffizienten modulo p von negativer Ordnung; man kann also die Gleichung für γ in der folgenden primitiven Form schreiben:

$$(6.)\qquad k(z) = p^\varepsilon z^n + \bar{b}_1 z^{n-1} + \bar{b}_2 z^{n-2} + \cdots + \bar{b}_n z^n = 0$$

wo $\varepsilon > 0$ ist, alle Koeffizienten $\bar{b}_i$ von nicht negativer Ordnung sind, und mindestens einer derselben durch p garnicht teilbar ist.

Ist nun zunächst δ eine ganze Zahl, so sind in (6.) auch ε sowie alle Ordnungszahlen der Koeffizienten $\bar{b}_i$ ganze Zahlen, und die Zahl $\gamma = \frac{\beta}{p^\delta}$ gehört ebenfalls dem Körper $K(1, \alpha)$ an, ist aber selbst eine gebrochene Zahl, da in der primitiven Gleichung (6.) für γ der Koeffizient von z^n gleich p^ε ist. Also ist unter dieser Voraussetzung β nicht durch p^δ teilbar.

Ist dagegen $\delta = \frac{r}{s}$ ein rationaler Bruch, so gehört der Quotient

$$\gamma = \frac{\beta}{p^{\frac{r}{s}}} = \frac{\beta}{p^\delta}$$

zwar nicht dem Körper $K(1, \alpha)$ an, wohl aber seine s-te Potenz: $\gamma^s = \frac{\beta^s}{p^r}$, und man zeigt leicht, daß unter der hier gemachten Voraussetzung γ^s also auch γ selbst modulo p nicht algebraisch ganz ist.

Genügt nämlich γ der Gleichung $k(z) = 0$ in (6) und γ^s der Gleichung $K(u) = 0$, so besteht bekanntlich zwischen den linken Seiten jener beiden Gleichungen die Relation

$$(7.)\qquad K(z^s) = k(z)\, k(\varrho z)\, k(\varrho^2 z) \ldots k(\varrho^{s-1} z)$$

wo $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{s}}$ die primitive s-te Wurzel der Einheit ist. Jeder der s Faktoren $k(\varrho^i z)$ ist aber auch eine primitive Funktion von z, da seine Koeffizienten

sich von denen von $k(z)$ nur durch eine Potenz von ϱ unterscheiden. Also ist auch das Produkt $K(z^s) = K(u)$ primitiv, besitzt aber als höchsten Koeffizienten die positive Potenz p^{rs} von p. Es ist also in der Tat γ^s, mithin auch $\gamma = \frac{\beta}{p^\delta}$ nicht algebraisch ganz, oder β durch p^δ nicht algebraisch teilbar, was zu beweisen war.

Wir sagen, daß die algebraische Zahl β durch die ganze oder gebrochene Potenz p^{δ_0} *genau teilbar* ist, wenn $\frac{\beta}{p^{\delta_0}}$ noch algebraisch ganz, aber für jede höhere Potenz p^δ von p $\frac{\beta}{p^\delta}$ gebrochen ist. Zu jeder Zahl β des Körpers gehört dann eine Potenz von p als genauer Teiler, deren Exponent δ_0 durch die Gleichung (5.) eindeutig bestimmt ist. Der zugehörige Exponent δ_0 ist also ein rationaler Bruch, dessen Nenner eine der Zahlen $2, 3, \dots n$ sein kann. Sind in der Gleichung (4.) für β alle Koeffizienten durch p teilbar, so ist β mindestens durch $p^{\frac{1}{n}}$ algebraisch teilbar und umgekehrt.

Ist β genau durch $p^{\frac{r}{s}}$ teilbar, und ist in der primitiven Gleichung für $z = \gamma = \frac{\beta}{p^{\frac{r}{s}}}$

$$k(z) = z^n + \bar{b}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{b}_{n-\nu} z^\nu + \dots + \bar{b}_n = 0$$

der Koeffizient $\bar{b}_{n-\nu}$ von z^ν in der Reihe $\bar{b}_n, \bar{b}_{n-1}, \dots$ der erste, welcher durch keine ganze oder gebrochene Potenz von p teilbar ist, so ist auch in der Gleichung für $u = \gamma^s$.

$$K(u) = u^n + \bar{B}_1 u^{n-1} + \dots + \bar{B}_{n-\nu} u^\nu + \dots + \bar{B}_n = 0 \tag{8.}$$

der Koeffizient $\bar{B}_{n-\nu}$ von u^ν ebenfalls der letzte, welcher p garnicht enthält. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung:

$$K(u) = k(z)\, k(\varrho z) \dots k(\varrho^{s-1} z), \tag{8^a.}$$

wenn man links und rechts alle Koeffizienten fortläßt, welche durch eine, wenn auch noch so kleine Potenz von p teilbar sind.

Innerhalb des Körpers $K(1, \alpha)$ der n-ten Ordnung kann man bekanntlich stets n ganze algebraische Zahlen

$$\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots \gamma^{(n)} \tag{9.}$$

so auswählen, daß alle modulo p ganzen algebraischen Zahlen von $K(1, \alpha)$ auf eine einzige Weise in der Form

$$(9^a.) \qquad \gamma = c_1\gamma^{(1)} + c_2\gamma^{(2)} + \cdots + c_n\gamma^{(n)}$$

mit modulo p ganzen rationalen Koeffizienten dargestellt werden können. Ein solches System heißt ein Fundamentalsystem für die modulo p ganzen algebraischen Zahlen von $K(1, \alpha)$. Jedes andere Fundamentalsystem $(\bar{\gamma}^{(1)}, \ldots \bar{\gamma}^{(n)})$ geht aus diesem durch eine umkehrbare lineare Substitution mit modulo p ganzzahligen Koeffizienten hervor.

Ist p kein Teiler der Gleichungsdiskriminante der Gleichung $f(x) = 0$ in (1.), so bilden die n Zahlen $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1})$ bereits ein solches Fundamentalsystem; im entgegengesetzten Falle kann aus diesem bekanntlich sehr einfach ein Fundamentalsystem hergeleitet werden. Wir denken uns ein solches System ein für allemal gegeben.

Jede Zahl γ des Bereiches $K(1, \alpha)$ ist auf eine einzige Weise in der obigen Form (9ª.) darstellbar, und die Koefficienten c_i sind ganz oder gebrochen, jenachdem γ selbst modulo p algebraisch ganz ist oder nicht. Speziell ist eine ganze Zahl γ durch p oder allgemeiner durch eine ganze Potenz p^r von p algebraisch teilbar, wenn alle Koeffizienten durch p bezw. durch p^r teilbar sind. Zwei Zahlen

$$\gamma = \sum_1^n c_i\gamma^{(i)} \quad \text{und} \quad \gamma' = \sum_1^n c_i'\gamma^{(i)}$$

sind dann und nur dann modulo p^r kongruent, d. h. ihre Differenz $\gamma - \gamma'$ ist durch p^r teilbar, wenn allgemein:

$$c_i \equiv c_i' \pmod{p^r}$$

ist.

§ 2.

Wir wollen nun die algebraischen Zahlen des Bereiches $K(\alpha, 1)$ in genau derselben Weise für den Bereich der Primzahl p untersuchen, wie dies in der vorigen Arbeit für die rationalen Zahlen, d. h. für die Zahlen des Bereiches $K(1)$ geschah. Um diese Untersuchung einfacher durchführen zu können, betrachte ich, wie a. a. O. neben dem Bereiche $K(1)$ der rationalen Zahlen die Gesamtheit $K(p)$ aller Zahlgrößen:

$$(1.) \qquad A = a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1}p^{\varrho+1} + \cdots,$$

deren Koeffizienten $a_\varrho, a_{\varrho+1}, \ldots$ eine im allgemeinen nicht abbrechende Reihe wohldefinierter Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ sind. Die rationalen Zahlen von $K(1)$ bilden dann denjenigen Teilbereich von $K(p)$, welcher aus allen periodischen Zahlgrößen besteht.

Wir betrachten zunächst *die modulo p reduzierten ganzen Zahlen von* $K(\alpha, 1)$, d. h. die p^n ganzen algebraischen Zahlen:

$$\varepsilon = e_1 \gamma^{(1)} + e_2 \gamma^{(2)} + \cdots + e_n \gamma^{(n)}, \tag{2.}$$

deren Koeffizienten e_i modulo p reduzierte ganze Zahlen, d. h. irgendwelche Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ sind. Nach der oben gemachten Bemerkung sind zwei solche Zahlen ε und ε' nur dann modulo p kongruent, wenn sie gleich sind.

Es sei nun:

$$\gamma = c_1 \gamma^{(1)} + c_2 \gamma^{(2)} + \cdots + c_n \gamma^{(n)} \tag{3.}$$

eine beliebige ganze oder gebrochene algebraische Zahl von $K(\alpha, 1)$. Entwickelt man dann alle n Koeffizienten c_i nach steigenden Potenzen von p, so ergeben sich für den Bereich von p n Gleichungen:

$$c_i = e_\varrho^{(i)} p^\varrho + e_{\varrho+1}^{(i)} p^{\varrho+1} + \cdots \qquad (p),$$

in welchen die Entwicklungskoeffizienten $e_\varrho^{(i)}, e_{\varrho+1}^{(i)}, \ldots$ n rein oder gemischt periodische Reihen von Zahlen $(0, 1, 2, \ldots p-1)$ bilden, und wo nicht alle n Anfangskoeffizienten $e_\varrho^{(1)}, \ldots e_\varrho^{(n)}$ Null sind. Setzt man diese Reihen für die c_i in (3) ein und faßt die mit denselben Potenzen von p multiplizierten Glieder zusammen, so ergibt sich für γ eine Entwicklung:

$$\gamma = \varepsilon_\varrho p^\varrho + \varepsilon_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \cdots \qquad (p), \tag{3^a.}$$

in welcher die Koeffizienten:

$$\varepsilon_r = e_r^{(1)} \gamma^{(1)} + e_r^{(2)} \gamma^{(2)} + \cdots + e_r^{(n)} \gamma^{(r)} \tag{4.}$$

wohldefinierte modulo p reduzierte ganze algebraische Zahlen sind; und da die einzelnen Koeffizientenreihen $c_\varrho^{(i)}, c_{\varrho+1}^{(i)}, \ldots$ periodisch sind, so gilt offenbar dasselbe für die Reihe $\varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1}, \ldots$ der reduzierten algebraischen Zahlen in der obigen Entwicklung von γ. Umgekehrt erkennt man, daß jede Reihe (3^a.) mit periodischen Koeffizienten bei der eben benutzten Definition der Gleichheit, einer Zahl des Körpers $K(\alpha, 1)$ gleich ist.

Wir erweitern nun den Bereich $K(\alpha, 1)$ der algebraischen Zahlen genau ebenso, wie dies in der vorigen Arbeit*) für den Bereich $K(1)$ der rationalen Zahlen geschah: Wir betrachten nämlich jetzt nicht bloß die *periodischen* Reihen (3ᵃ.), sondern die Gesamtheit aller derjenigen Zahlgrößen

$$\gamma = \varepsilon_\varrho p^\varrho + \varepsilon_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \cdots \qquad (p)$$

deren Koeffizienten ε_r für jedes noch so große r wohldefinierte modulo p reduzierte ganze Zahlen von $K(\alpha, 1)$ sind. Die Gesamtheit aller dieser Zahlgrößen, soll *der Bereich* $K(\alpha, p)$ genannt werden; der Bereich $K(\alpha, 1)$ ist dann derjenige Teil von $K(\alpha, p)$ welcher alle periodischen Reihen umfaßt.

Es sei speziell

$$(5.) \qquad \gamma = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2 + \cdots = \varepsilon_0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \qquad (p)$$

eine solche Zahlgröße, welche keine negativen Potenzen von p enthält, und welche wir wieder**) in der früher eingeführten einfacheren Form $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$ schreiben wollen. Dann soll wieder, wie a. a. O. auf S. 60 für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots$ die ganze algebraische Zahl des Bereiches $K(\alpha, 1)$:

$$(6.) \qquad \gamma_k = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \cdots + \varepsilon_k p^k = \varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

der k-te Näherungswert von γ genannt werden. Diese Näherungswerte:

$$(6^a.) \qquad \gamma_0 = \varepsilon_0, \ \gamma_1 = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ \gamma_2 = \varepsilon_0, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \ldots$$

bilden dann eine eindeutig bestimmte Reihe von wohldefinierten ganzen algebraischen Zahlen, für welche allgemein:

$$(6^b.) \qquad \gamma_k \equiv \gamma_{k-1} \pmod{p^k}$$

ist, und auch hier kann jede Zahl γ als Grenzwert ihrer Näherungswerte durch die Gleichung

$$(7.) \qquad \gamma = \lim_{k=\infty} \gamma_k \qquad (p)$$

definiert werden.

Eine Zahlgröße γ heißt gebrochen oder ganz für den Bereich von p, je nachdem ihre Entwicklung negative Potenzen von p enthält oder nicht. Ist

$$\gamma = \frac{\varepsilon_{-r}}{p^r} + \frac{\varepsilon_{-(r-1)}}{p^{r-1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{-1}}{p} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \cdots$$

---

*) Vgl. G. d. A. S. 58 flgde.

**) Vgl. G. d. A. S. 52. (3ᵃ.)

gebrochen, so treten zuerst noch eine Anzahl von Näherungswerten

$$\gamma_{-r}, \cdots \gamma_{-1}$$

von negativer Ordnungszahl auf.

Eine Zahlgröße des Bereiches $K(\alpha, p)$ ist offenbar ganz oder gebrochen, je nachdem alle ihre Näherungswerte ganze oder gebrochene algebraische Zahlen des Bereiches $K(\alpha, 1)$ sind.

Zwei Zahlgrößen γ und γ' des Bereiches $K(\alpha, p)$ heißen *gleich* für den Bereich von γ, wenn ihre Näherungswerte

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \quad \gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$$

für genügend große Indizes und jede noch so hohe Potenz von p kongruent sind, und dies ist wieder offenbar nur dann der Fall, wenn ihre Entwicklungskoeffizienten ε_r und ε'_r für jeden Index gleich sind. Eine Zahl γ ist speziell gleich Null für den Bereich von p, wenn ihre Näherungswerte γ_r durch jede noch so hohe Potenz von p teilbar sind, falls man den Index r genügend groß wählt.

Ebenso wie innerhalb des Bereiches $K(p)$ definieren wir auch hier die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Zahlgrößen γ und δ des Bereiches $K(\alpha, p)$ durch die Gleichungen*)

$$(8.)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma \pm \delta &= \lim_{k=\infty} (\gamma_k \pm \delta_k), \\ \gamma \delta &= \lim_{k=\infty} (\gamma_k \cdot \delta_k), \\ \frac{\gamma}{\delta} &= \lim_{k=\infty} \left(\frac{\gamma_k}{\delta_k}\right), \end{aligned}\right. \qquad (p)$$

wobei in der letzten Gleichung nur der Fall $\delta = 0 \ (p)$ auszuschließen ist, und wir beweisen wie a. a. O., daß jede dieser vier elementaren Operationen zu einer eindeutig bestimmten Zahlgröße des Bereiches $K(\alpha, p)$ hinführt.

Da sich jede Zahl des Bereiches $K(\alpha, p)$ in der Form

$$(9.)\qquad \gamma = c_1 \gamma^{(1)} + \cdots + c_n \gamma^{(n)}$$

mit Koeffizienten c_i des Bereiches $K(p)$ schreiben läßt, und da die Zahlen $\gamma^{(i)}$ rationale Funktionen von α mit Koeffizienten des Bereiches $K(1)$ sind, so

*) S. G. d. A. S. 64 und 65.

ist jede Zahlgröße γ eine rationale Funktion der algebraischen Zahl α, deren Koeffizienten Zahlgrößen des Bereiches $K(p)$ sind; und da sich auch umgekehrt jede solche rationale Funktion von α in der Form (9.) schreiben, und somit auch in der hier angegebenen Weise nach Potenzen von p entwickeln läßt, so kann der Bereich $K(\alpha, p)$ auch als der Körper aller rationalen Funktionen von α definiert werden, deren Koeffizienten dem Bereiche $K(p)$ angehören.

§ 2.

Ich nehme zuerst an, daß die linke Seite der Grundgleichung für α:

$$(1.) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_n = 0,$$

deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind, also dem Bereiche $K(1)$ angehören, nicht bloß innerhalb $K(1)$, sondern auch in dem größeren Bereiche $K(p)$ irreduktibel ist. Nach dem im § 4 der vorigen Arbeit bewiesenen Fundamentalsatze kann man sich stets durch eine endliche Anzahl von Versuchen überzeugen, ob diese Voraussetzung für eine vorgelegte Funktion $f(x)$ und eine gegebene Primzahl p erfüllt ist, oder nicht, und im letzten Falle kann man $f(x)$ eindeutig in ein Produkt innerhalb $K(p)$ irreduktibler Faktoren zerlegen.

Unter dieser Voraussetzung bestehen für die n Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ der Gleichung (1) innerhalb des Bereiches $K(p)$ wörtlich dieselben Sätze wie für die Wurzeln einer innerhalb $K(1)$ irreduktiblen Gleichung in dem Bereiche $K(1)$, und sie werden wörtlich ebenso bewiesen:

Eine Wurzel α der Gleichung (1) genügt dann und nur dann einer anderen Gleichung:

$$g(x) = g_0 x^m + g_1 x^{m-1} + \cdots + g_m = 0 \qquad (p),$$

deren Koeffizienten Zahlen des größeren Bereiches $K(p)$ sind, wenn ihre linke Seite durch $f(x)$ teilbar, wenn also:

$$g(x) = f(x)\, g_1(x) \qquad (p)$$

ist.

Ist nämlich $g(\alpha) = 0$ (p), so haben $g(x)$ und $f(x)$ mindestens eine Wurzel gemeinsam, und das ist wegen der Irreduktibilität von $f(x)$ innerhalb

$K(p)$ nur dann möglich, wenn $f(x)$ ein Teiler von $g(x)$ ist. Hieraus folgt sofort:

Eine Gleichung

$$g(\alpha_1) = 0 \qquad (p),$$

welche für eine der n Wurzeln der Gleichung (1) besteht, bleibt richtig, wenn man α_1 durch die konjugierten Zahlen $\alpha_2, \dots \alpha_n$ ersetzt.

Eine Gleichung von niedrigerem als dem n-ten Grade

$$g(x) = g_1 x^{n-1} + \dots + g_{n-1} = 0,$$

deren Koeffizienten zu $K(p)$ gehören, kann nur dann für $x = \alpha$ erfüllt sein, wenn alle ihre Koeffizienten Null sind.

Es sei nun:

$$(2.) \qquad \beta = \varphi(\alpha)$$

irgend eine Zahlgröße des Bereiches $K(\alpha, p)$. Dann entsprechen den n konjugierten Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ die n konjugierten Zahlgrößen:

$$(2^a.) \qquad \beta_i = \varphi(\alpha_i) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

der n konjugierten Bereiche:

$$K(\alpha_1, p),\ K(\alpha_2, p), \dots K(\alpha_n, p).$$

Diese genügen dann ebenfalls einer Gleichung n-ten Grades:

$$(3.) \quad g(y) = (y - \beta_1)(y - \beta_2) \dots (y - \beta_n) = y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n = 0 \qquad (p),$$

deren Koeffizienten b_i, als symmetrische Funktionen der α_i, Zahlengrößen des Bereiches $K(p)$ sind. Dann gilt der weitere Satz:

Jede Zahlgröße β des Bereiches $K(\alpha, p)$ genügt nebst ihren n konjugierten einer Gleichung des n-ten Grades, deren linke Seite innerhalb $K(p)$ entweder selbst irreduktibel, oder die Potenz einer irreduktiblen Funktion ist.

Zerfällt nämlich $g(y)$ in mehrere Faktoren, wovon man sich nach dem oben erwähnten Satze durch eine endliche Anzahl von Versuchen überzeugen kann, und ist $g_1(y)$ derjenige unter den irreduktiblen Faktoren, welcher für

$$y = \beta_1 = \varphi(\alpha_1)$$

für den Bereich von p gleich Null wird, so folgt, da die Gleichung:

$$g_1(\beta_1) = g_1(\varphi(\alpha_1)) = 0$$

nach dem soeben bewiesenen Satze richtig bleibt, wenn man in ihr α_1 der Reihe nach durch $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ ersetzt, daß die Gleichung $g_1(y) = 0$ durch alle n konjugierten Zahlgrößen $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ befriedigt wird; und da dasselbe von allen irreduktiblen Faktoren von $g(y)$ gilt, so müssen sie sämtlich einander gleich, also:

$$(3^a.) \qquad g(y) = (g_1(y))^\nu \qquad (p)$$

sein, wo $g_1(y)$ eine für den Bereich von p irreduktible Funktion μ-ten Grades, und $\mu\nu = n$ ist.

Es sei nun speziell β eine für den Bereich von p ganze algebraische Zahlgröße, also $g(y)$ eine ganzzahlige Funktion von y. Betrachten wir dann in der Gleichung (3ᵃ.) rechts und links die ersten Näherungswerte $g^{(0)}(y)$ und $g_1^{(0)}(y)$ für den Primzahlmodul p und beachten dabei, daß nach dem G. d. A. auf S. 84 bewiesenen Satze die für den Bereich von p irreduktible Funktion $g_1(y)$ modulo p betrachtet höchstens der Potenz einer modulo p irreduktiblen Funktion kongruent sein kann, so ergibt sich der weitere Satz:

Die Gleichung n-ten Grades, der irgend eine für den Bereich von p ganze algebraische Zahl β_1 nebst ihren Konjugierten genügt, ist modulo p betrachtet kongruent einer Potenz einer modulo p irreduktiblen ganzen ganzzahligen Funktion von y.

§ 4.

Die Untersuchung des für p irreduktiblen Körpers $K(\alpha, p)$, zu der ich jetzt übergehe, gestaltet sich nun ganz besonders einfach, und ihre Resultate entsprechen wörtlich den Ergebnissen, welche ich in der vorigen Abhandlung (G. d. A.) für die Zahlen des Bereiches $K(p)$ hergeleitet habe.

Unter einer *Einheit* für den Bereich von p verstehe ich eine ganze algebraische Zahlgröße ε, deren reziproker Wert $\frac{1}{\varepsilon}$ ebenfalls für den Bereich von p algebraisch ganz ist.

Ist

$$E(x) = x^m + g_1 x^{m-1} + \cdots + g_m = 0$$

die innerhalb $K(p)$ irreduktible Gleichung, der ε genügt, so ist bekanntlich ε dann und nur dann eine Einheit, wenn der letzte Koeffizient

$$g_m = \pm N(\varepsilon)$$

eine rationale Einheit ist, weil nur dann auch die irreduktible Gleichung für $\frac{1}{\varepsilon}$

$$\bar{E}(x) = x^m + \frac{g_{m-1}}{g_m} x^{m-1} + \cdots + \frac{1}{g_m} = 0$$

lauter ganze Koeffizienten hat.

Eine ganze algebraische Zahlgröße ε ist also dann und nur dann eine algebraische Einheit für den Bereich von p, wenn ihre Norm eine rationale Einheit ist.

Das Produkt und der Quotient zweier Einheiten ist hiernach wieder eine Einheit. Ist ferner ε^ν eine Einheit, d. h. sind ε^ν und $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\nu$ algebraisch ganz, so gilt dasselbe von ε selbst.

Eine Zahl ist also dann und nur dann eine Einheit, wenn irgend eine ihrer positiven oder negativen Potenzen eine Einheit ist.

Die nun folgende Untersuchung führt nur aus dem Grunde zu einem so besonders einfachen Resultate, weil wir den Begriff der Irreduktibilität für den Bereich von p einführen und die Grundgleichung für die algebraische Zahl α als irreduktibel für diesen Bereich voraussetzen können.

Eine Zahl γ unseres Bereiches $K(\alpha, p)$ ist dann und nur dann durch keine ganze oder gebrochene positive oder negative Potenz von p teilbar, wenn sie eine Einheit ist.

In der Tat, ist zunächst γ durch eine negative Potenz von p teilbar, so ist ja γ nicht algebraisch ganz, also sicher keine Einheit. Ist nun die ganze Zahl γ eine Einheit, ist also in der Gleichung für γ

$$g(y) = y^n + g_1 y^{n-1} + \cdots + g_n = 0$$

der letzte Koeffizient $g_n = \pm N(\gamma)$ durch p nicht teilbar, so ist ja γ nach unserer früheren Definition (siehe S. 3) durch keine Potenz von p teilbar.

Es sei nun umgekehrt g_n keine Einheit, also durch p teilbar, dann zeigt man leicht, daß γ mindestens durch $p^{\frac{1}{n}}$ algebraisch teilbar sein muß.

Betrachtet man nämlich den ersten Näherungswert von $g(y)$ modulo p

$$g_0(y) = y^n + g_1^{(0)} y^{n-1} + \cdots + g_{n-1}^{(0)} y,$$

indem man beachtet, daß n. d. V. $g_n^{(0)} = 0$ ist, so erkennt man, daß $g_0(y)$ den Linearfaktor y mindestens einmal besitzt. Da aber nach dem G. d. A. auf S. 84 bewiesenen Satze $g_0(y)$, modulo p betrachtet, lauter gleiche irreduktible Faktoren besitzt, so muß $g_0(y) = y^n$ sein, d. h. alle Koeffizienten $g_1, g_2, \ldots g_n$ der Gleichung für γ sind durch p teilbar; γ ist somit nach der auf S. 5 Mitte gemachten Bemerkung sicher mindestens durch $p^{\frac{1}{n}}$ algebraisch teilbar, wie zu beweisen war.

Wir hatten nun gesehen, daß jede algebraische Zahl auf eine einzige Weise in der Form:

$$\beta = p^{\frac{r}{s}} \gamma \tag{1.}$$

darstellbar ist, wo γ eine ganze algebraische Zahl ist, welche durch keine ganze oder gebrochene Potenz von p divisibel ist. Ist nun speziell $s = 1$, also

$$\beta = p^r \gamma, \tag{1^a.}$$

so ist auch $\gamma = \frac{\beta}{p^r}$ eine ganze Zahl *unseres Bereiches* $K(p, \alpha)$ und sie ist also nach dem soeben bewiesenen Satze eine Einheit unseres Bereiches.

Ist dagegen $s > 1$, so ist γ im allgemeinen keine Zahl unseres Bereiches, aber man zeigt leicht, daß auch in diesem Falle γ eine Einheit sein muß. In der Tat ergibt sich aus der obigen Gleichung:

$$\beta^s = p^r \gamma^s, \tag{1^b.}$$

und hier ist

$$\gamma^s = \frac{\beta^s}{p^r}$$

wieder eine ganze Zahl des Bereiches $K(p, \alpha)$, welche ebenfalls keine positive Potenz von p enthält, weil dasselbe für γ gilt; also ist γ^s eine Einheit, und somit gilt dasselbe für γ selbst, wie zu bewiesen war.

Es ergibt sich also der folgende wichtige Satz, welcher eine unmittelbare Erweiterung des in G. d. A. S. 64 unten bewiesenen Fundamentaltheoremes ist:

Jede Zahl β kann auf eine einzige Weise in der Form

$$(2.)\qquad \beta = p^{\frac{r}{s}}\varepsilon$$

dargestellt werden, wo ε eine Einheit bedeutet.

Geht man in der aus (2.) folgenden Gleichung:

$$(2^a.)\qquad \beta^s = p^r\varepsilon^s$$

zur Norm über und beachtet man, daß die Norm der algebraischen Einheit ε^s wieder eine rationale Einheit ist, so folgt aus der Gleichung:

$$(3.)\qquad N(\beta)^s = p^{nr}N(\varepsilon^s),\quad N(\beta) = p^{n\cdot\frac{r}{s}}N(\varepsilon^s)^{\frac{1}{s}},$$

daß die Norm von β genau durch $p^{n\cdot\frac{r}{s}}$ teilbar ist; und da dieser Exponent von p eine ganze Zahl sein muß, so ergeben sich die Sätze:

Eine algebraische Zahl β ist dann und nur dann genau durch $p^{\frac{r}{s}}$ teilbar, wenn ihre Norm genau durch $p^{n\cdot\frac{r}{s}}$ teilbar ist. Eine jede algebraische Zahl des Bereiches, ist also stets durch eine ganzzahlige oder gebrochene Potenz von p teilbar, in welcher der Nenner des Exponenten ein Divisor von n ist.

Sind zwei Zahlen β und β' genau durch p^{ϱ} und $p^{\varrho'}$ teilbar, ist also:

$$(4.)\qquad \beta = p^{\varrho}\varepsilon,\quad \beta' = p^{\varrho'}\varepsilon',$$

so folgt sofort aus den beiden Gleichungen:

$$(4^a.)\qquad \beta\beta' = p^{\varrho+\varrho'}\varepsilon\varepsilon',\quad \frac{\beta}{\beta'} = p^{\varrho-\varrho'}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'},$$

daß ihr Produkt und ihr Quotient genau bezw. durch $p^{\varrho+\varrho'}$ und $p^{\varrho-\varrho'}$ teilbar ist.

Um nun die algebraischen Zahlen genau ebenso für den Bereich von p darstellen zu können wie früher die rationalen Zahlen, suche ich in dem Bereiche $K(p, \alpha)$ eine algebraische Zahl, welche eine möglichst kleine, aber noch positive Potenz von p enthält. Zu diesem Zwecke brauche ich unter allen p^n modulo p reduzierten ganzen algebraischen Zahlen:

$$(5.)\qquad \gamma = c_1\gamma^{(1)} + c_2\gamma^{(2)} + \cdots + c_n\gamma^{(n)} \qquad (c_i = 0, 1, \ldots p-1)$$

nur eine solche aufzusuchen, deren Norm durch die niedrigste aber noch

positive Potenz von p teilbar ist. Ist keine dieser Zahlen außer $\gamma = 0$ durch eine positive Potenz von p teilbar, so enthält eben p selbst die niedrigste positive Potenz von p. In jedem Falle existiert also eine gewöhnliche ganze algebraische Zahl des Bereiches $K(p, \alpha)$, welche die niedrigste Potenz von p enthält. Es sei:

$$\pi = p^{\frac{d}{e}} \varepsilon_0 \tag{6.}$$

eine solche Zahl, und es sei der Exponent $\frac{d}{e}$ der in π enthaltenen Potenz von p bereits in seiner reduzierten Form geschrieben. Dann muß, wie oben bewiesen wurde, e ein Teiler von n, außerdem aber $d = 1$ sein. Wäre das letztere nämlich nicht der Fall, und sind d' und e' zwei so gewählte ganze Zahlen, daß

$$d d' + e e' = 1$$

ist, so folgte aus der obigen Gleichung, daß die ganze algebraische Zahl:

$$\pi' = \pi^{d'} p^{e'} = p^{\frac{d d' + e e'}{e}} \varepsilon_0^{d'} = p^{\frac{1}{e}} \varepsilon, \tag{6^a.}$$

eine niedrigere Potenz von p enthält als π gegen unsere Voraussetzung.

Legen wir diese Zahl π zugrunde, so gilt der weitere Satz:

Jede ganze oder gebrochene Zahl β des Bereiches $K(p, \alpha)$ kann auf eine einzige Weise in der Form:

$$\beta = \pi^d \bar{\varepsilon} \tag{7.}$$

dargestellt werden, in welchen d einen ganzzahligen Exponenten und $\bar{\varepsilon}$ eine Einheit bedeutet, welche dem Körper $K(p, \alpha)$ selbst angehört. Wir nennen den Exponenten d die Ordnungszahl von β für die Primzahl p.

In der Tat, ist

$$\beta = p^{\varrho} \varepsilon,$$

so gibt es sicher zwei aufeinander folgende Brüche $\frac{d}{e}$ und $\frac{d+1}{e}$, zwischen denen der Exponent ϱ so liegt, daß

$$\frac{d}{e} \leq \varrho < \frac{d+1}{e}, \text{ d. h. } 0 \leq \varrho - \frac{d}{e} < \frac{1}{e} \tag{8.}$$

ist. Dann besitzt die dem Bereiche $K(1, \alpha)$ angehörige algebraische Zahl $\frac{\beta}{\pi^d}$ offenbar die Darstellung

$$(8^a.) \qquad \frac{\beta}{\pi^d} = p^{\varrho - \frac{d}{e}} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0^d} = p^{\varrho - \frac{d}{e}} \bar{\varepsilon},$$

wo $\bar{\varepsilon}$ wieder eine Einheit ist; und diese Zahl wäre demnach nach (8.) durch eine niedrigere Potenz von p, als $p^{\frac{1}{e}}$ genau teilbar, gegen die über π gemachte Voraussetzung. Ist aber $\varrho = \frac{d}{e}$, so ist eben nach (8ᵃ.)

$$\beta = \bar{\varepsilon} \cdot \pi^d,$$

wo $\bar{\varepsilon} = \frac{\beta}{\pi^d}$ offenbar eine Einheit des Körpers $K(p, \alpha)$ bedeutet, und damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Aus den oben gemachten Bemerkungen ergeben sich noch die folgenden Sätze:

> Die Ordnungszahl eines Produktes bezw. eines Quotienten von zwei Zahlen ist gleich der Summe bezw. der Differenz der Ordnungszahlen seiner Faktoren. Die Primzahl p selbst besitzt die Ordnungszahl e, da
>
> $$p = \pi^e \varepsilon$$
>
> ist.

Ich führe jetzt statt der rationalen Primzahl p und ihrer gebrochenen Potenzen $p^{\frac{d}{e}}$ die algebraische Primzahl π und ihre ganzzahligen positiven oder negativen Potenzen ein, und nenne zwei algebraische Zahlen *äquivalent* für den Bereich von p, wenn sie sich nur durch eine Einheit des Körpers $K(p, \alpha)$ unterscheiden. Dann können in allen Fragen der Teilbarkeit äquivalente Zahlen für einander als Modul gesetzt werden. Speziell ist p selbst äquivalent π^e. Wir nennen zwei Zahlen β und β' kongruent für eine Potenz π^d von π als Modul, wenn ihre Differenz $\beta - \beta'$ durch π^d teilbar ist, oder also die Ordnungszahl d besitzt.

Die Zahl π selbst hat hier den Charakter einer Primzahl, denn es besteht offenbar der Satz:

> Das Produkt $\beta\beta'$ zweier Zahlen ist nur dann durch π teilbar, wenn mindestens einer seiner Faktoren durch π teilbar ist.

Da endlich $p \sim \pi^e$ ist, so gilt jede Kongruenz modulo p a fortiori für den Modul π, aber das Umgekehrte findet natürlich im allgemeinen nicht statt.

Ich untersuche nun zunächst die ganzen Zahlen unseres Bereiches für den Primzahlmodul π. Jede ganze Zahl ist modulo p, also auch modulo π^e, einer einzigen unter den p^n modulo p reduzierten ganzen Zahlen

$$c_1\gamma^{(1)} + c_2\gamma^{(2)} + \cdots + c_n\gamma^{(n)}$$

kongruent, wenn die Koeffizienten c_i unabhängig voneinander die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots p-1$ durchlaufen. Diese p^n Zahlen brauchen nun für den Primzahlmodul π nicht sämtlich inkongruent zu sein. Wohl aber kann man aus dieser endlichen Anzahl ein vollständiges System modulo π inkongruenter Zahlen dadurch aussuchen, daß man unter diesen von allen einander modulo π kongruenten immer nur je eine beibehält. Es mögen nun die σ algebraischen Zahlen

$$(9.)\qquad \varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \ldots \varepsilon^{(\sigma-1)}$$

ein vollständiges System modulo π inkongruenter ganzer algebraischer Zahlen bilden. Dann ist nur eine einzige unter ihnen durch π teilbar, und für sie kann $\varepsilon^{(0)} = 0$ gewählt werden; alle $\sigma - 1$ anderen sind Einheiten modulo p.

Ist dann γ eine beliebige ganze Zahl unseres Bereiches, so kann sie auf eine einzige Weise in der Form:

$$\gamma = \varepsilon^{(0)} + \pi\gamma^{(1)}$$

geschrieben werden, wo $\varepsilon^{(0)}$ eine der σ Zahlen (9.) und $\gamma^{(1)}$ wieder eine bestimmte ganze Zahl bedeutet. Denn jede Zahl γ ist ja modulo π einer einzigen Zahl der Reihe (9.) kongruent. Schreibt man dann $\gamma^{(1)}$ in derselben Weise, so erhält man eine beliebig weit auszudehnende Reihe linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \varepsilon^{(0)} + \pi\gamma^{(1)}\\
\gamma^{(1)} &= \varepsilon^{(1)} + \pi\gamma^{(2)}\\
&\vdots\\
\gamma^{(k-1)} &= \varepsilon^{(k-1)} + \pi\gamma^{(k)}.\\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Multipliziert man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, \pi, \pi^2 \ldots$, addiert sie und läßt dann die sowohl links wie rechts auftretenden Zahlen $\gamma^{(i)} \pi^i$ fort, so erhält man für γ die folgende eindeutige Darstellung:

$$(10.) \qquad \gamma = \varepsilon^{(0)} + \pi \varepsilon^{(1)} + \pi^2 \varepsilon^{(2)} + \cdots = \varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)} \varepsilon^{(2)} \ldots,$$

wo die Gleichheit wieder so aufzufassen ist, daß die Näherungswerte der rechts stehenden Reihe der Zahl γ für jede noch so hohe Potenz von π kongruent sind, wenn man diese Reihe nur weit genug verlängert und dann abbricht.

Versteht man jetzt unter $\gamma = \pi^r \varepsilon$ eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl unseres Bereiches, so ergibt sich der wichtige Satz:

Jede Zahl γ des Bereiches $K(p, \alpha)$, also auch jede Zahl des in diesem enthaltenen Bereiches $K(1, \alpha)$ läßt sich auf eine einzige Weise in der Form darstellen:

$$(11.) \qquad \gamma = \varepsilon^{(r)} \pi^r + \varepsilon^{(r+1)} \pi^{r+1} + \cdots \qquad (p),$$

wo die Koeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ eindeutig bestimmte Zahlen der Reihe (9.) bedeuten. Diese Darstellung stimmt mit der überein, welche G. d. A. S. 60 für die rationalen Zahlgrößen des Bereiches $K(p)$ eingeführt wurde.

Wegen der Irreduktibilität der Grundgleichung für α innerhalb des Bereiches $K(p)$ bleibt die soeben gefundene Gleichung für α bestehen, wenn man α der Reihe nach durch die n konjugierten Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ersetzt. Bezeichnet man also die zu γ, π und den Koeffizienten $\varepsilon^{(k)}$ gehörigen konjugierten algebraischen Zahlen durch untere Indizes, so erhält man für die n zu γ konjugierten algebraischen Zahlen γ_i die folgenden Reihenentwicklungen für den Bereich der Primzahl p:

$$(11^a.) \qquad \gamma_i = \varepsilon_i^{(r)} \pi_i^r + \varepsilon_i^{(r+1)} \pi_i^{r+1} + \cdots \qquad (p), \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

und die Gleichung n-ten Grades für γ

$$g(y) = y^n + g_1 y^{n-1} + \cdots + g_n = 0$$

zerfällt für den Bereich von p in die n konjugierten Linearfaktoren:

$$(12.) \qquad g(y) = (y - \gamma_1)(y - \gamma_2) \ldots (y - \gamma_n) \qquad (p),$$

wo die n Zahlen γ_i die obigen konjugierten Potenzreihen bedeuten.

§ 5.

Ich wende mich zunächst zu einer genaueren Bestimmung der Anzahl σ aller modulo π inkongruenten ganzen Zahlen von $K(p, \alpha)$ und beweise, daß

$$(1.) \qquad \sigma = p^f$$

ist, wenn $ef = n$ ist, wenn also f den zu e komplementären Faktor bedeutet.

Nach dem am Ende der vorigen Paragraphen bewiesenen Satze ist nämlich jede ganze Zahl von $K(p, \alpha)$ modulo p, oder also modulo π^e, kongruent einer und nur einer der σ^e ganzen algebraischen Zahlen:

$$(2.) \qquad \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \varepsilon^{(2)}\pi^2 + \cdots + \varepsilon^{(e-1)}\pi^{e-1},$$

welche man erhält, wenn man jeden dieser Koeffizienten unabhängig von den anderen ein vollständiges Restsystem modulo π durchlaufen läßt. Da aber dieselbe Anzahl aller modulo p inkongruenten Zahlen gleich p^n ist, so wird in der Tat $\sigma = p^f$, wie zu beweisen war.

Man beweist nun auf bekannte Art die folgenden Sätze:

Jede der $\sigma - 1 = p^f - 1$ modulo π inkongruenten Einheiten

$$\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots \varepsilon^{(\sigma-1)}$$

genügt modulo π der Kongruenz:

$$(3.) \qquad x^{\sigma-1} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } \pi),$$

und da der Modul π den Charakter einer Primzahl hat, so ergibt sich für ein variables x die Zerlegung:

$$(3^a.) \qquad x^{\sigma-1} - 1 \equiv (x - \varepsilon^{(1)})(x - \varepsilon^{(2)}) \ldots (x - \varepsilon^{(\sigma-1)}) \quad (\text{mod. } \pi),$$

oder wenn man auf beiden Seiten mit $x = x - \varepsilon^{(0)}$ multipliziert

$$(3^b.) \qquad x^{p^f} - x \equiv \prod_{k=0}^{p^f-1} (x - \varepsilon^{(k)}) \quad (\text{mod. } \pi).$$

Um nun die Eigenschaften der σ modulo π inkongruenten Zahlen $\varepsilon^{(k)}$ genauer darzulegen, denke ich mir die linke Seite der Kongruenz (3^b.) in ihre modulo p irreduktiblen ganzzahligen Faktoren zerlegt. Dieselbe Zerlegung besteht dann auch modulo π, da ja $p \sim \pi^e$ ist; aber man erkennt auch sofort, daß dieselben Faktoren für den Modul π irreduktibel bleiben. Die

Zerlegung der Funktion $x^{p^f} - x$ modulo p ist aber wohlbekannt und leicht zu beweisen. Es ist nämlich

(4.) $$x^{p^f} - x \equiv \prod_{d/f} \cdot \prod_i g_d^{(i)}(x) \qquad (\text{mod. } p),$$

wo das Produkt rechts auf alle und nur die inkongruenten modulo p irreduktiblen Funktionen auszudehnen ist, deren Grad d ein Teiler von f ist. Aus der somit sich ergebenden für ein variables x giltigen Kongruenz:

(5.) $$\prod_{d/f} \prod_i g_d^{(i)}(x) \equiv \prod_{k=0}^{\sigma-1} (x - \varepsilon^{(k)}) \qquad (\text{mod. } \pi)$$

folgt nun sofort, daß jeder der irreduktiblen Faktoren $g_d(x)$ modulo π innerhalb $K(p, \alpha)$ genau so viele inkongruente Wurzeln $\varepsilon^{(i)}$ hat, als ihr Grad angibt, und daß umgekehrt jede Zahl von $K(p, \alpha)$ eine und nur eine der Kongruenzen

(6.) $$g_d(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \pi)$$

befriedigt. Hieraus folgt also der Satz:

Eine modulo p irreduktible Kongruenz d-ten Grades besitzt modulo π innerhalb $K(p, \alpha)$ dann und nur dann eine Wurzel, wenn d ein Teiler von f ist; dann aber besitzt sie soviel Wurzeln, als ihr Grad angibt.

Bekanntlich gibt es für jeden Grad modulo p irreduktible Funktionen; es gibt also auch solche Funktionen vom f-ten Grade, und eine solche besitzt somit innerhalb $K(p, \alpha)$ genau f inkongruente Kongruenzwurzeln. Es sei

(7.) $$g(x) = x^f + g_1 x^{f-1} + \cdots + g_f$$

eine solche Funktion, deren Koeffizienten also ganze Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ sind, und ε bedeute eine der f modulo π inkongruenten Wurzeln, der Kongruenz

$$g(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Eine solche Einheit ε, welche einer irreduktiblen ganzzahligen Kongruenz vom f-ten, d. h. von möglichst hohem Grade genügt, soll eine *primitive Einheit* heißen. Dann genügt ε keiner Kongruenz niedrigeren Grades modulo π, und hieraus folgt, daß die $\sigma = p^f$ algebraischen Zahlen:

$$c_0 + c_1 \varepsilon + \cdots + c_{f-1} \varepsilon^{f-1} \qquad (c_i = 0, 1, \ldots p-1)$$

sämtlich modulo π inkongruent sind. Da aber die Anzahl aller modulo π inkongruenten Zahlen ebenfalls gleich p^f ist, so ergibt sich der Satz:

Ist ε eine primitive Einheit des Bereiches $K(p, \alpha)$, so ist jede ganze Zahl von $K(p, \alpha)$ modulo π einer einzigen unter den p^f Zahlen

$$(8.) \qquad \varepsilon^{(i)} = c_0 + c_1 \varepsilon + \cdots + c_{f-1} \varepsilon^{f-1} \qquad (c_k = 0, 1, \ldots p-1)$$

kongruent. Wir können und wollen daher in den für alle Zahlen von $K(p, \alpha)$ geltenden Darstellungen:

$$\gamma = \varepsilon^{(r)} \pi^r + \varepsilon^{(r+1)} \pi^{r+1} + \cdots$$

die Entwicklungskoeffizienten $\varepsilon^{(k)}$ stets als ganze Funktionen von ε von niedrigerem als dem f-ten Garde mit modulo p reduzierten Koeffizienten annehmen.

§ 6.

Die bisher durchgeführten Untersuchungen haben ergeben, daß eine beliebige Wurzel α einer für den Bereich von p irreduktiblen Gleichung:

$$(1.) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

mit rationalen Zahlkoeffizienten für den Bereich von p in eine Potenzreihe

$$(2.) \qquad \alpha = \varepsilon^{(r)} \pi^r + \varepsilon^{(r+1)} \pi^{r+1} + \cdots \qquad (p)$$

entwickelt werden kann, welche nach ganzen Potenzen von $\pi \backsim p^{\frac{1}{e}}$ fortschreitet, und deren Koeffizienten

$$(2^a.) \qquad \varepsilon^{(i)} = c_0^{(i)} + c_1^{(i)} \varepsilon + \cdots + c_{f-1}^{(i)} \varepsilon^{f-1}$$

wohlbestimmte ganze Funktionen von einer Zahl ε mit modulo p reduzierten Koeffizienten sind, welche selbst einer beliebig anzunehmenden irreduktiblen Kongruenz f-ten Grades

$$(3.) \qquad g(\varepsilon) = \varepsilon^f + g_1 \varepsilon^{f-1} + \cdots + g_f = 0 \qquad (\text{mod. } \pi)$$

genügt. Da dasselbe dann aber auch für alle rationalen Funktionen von α, d. h. für den ganzen Körper $K(p, \alpha)$ gilt, so ist dieser ganze Körper rational durch die beiden Zahlen ε und π *desselben* Körpers darstellbar, d. h. jene beiden Körper sind einander gleich, oder es ist

$$K(p, \alpha) = K(\varepsilon, \pi).$$

Für die zu $K(p, \alpha_1)$ konjugierten Körper $K(p, \alpha_i)$ ergeben sich jedesmal die konjugierten Reihen, welche den n konjugierten Zahlenpaaren (ε_i, π_i) entsprechen. Wir haben so für alle Zahlgrößen des algebraischen Körpers $K(p, \alpha)$ wörtlich dieselbe Darstellung, wie wir sie früher (G. d. A.) für die Zahlgrößen des rationalen Bereiches $K(p)$ in der Reihe:

$$A = e^{(r)} p^r + e^{(r+1)} p^{r+1} + \cdots \qquad (p)$$

gefunden hatten; nur tritt hier an die Stelle der Entwicklungszahl p die algebraische Zahl $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ und die Entwicklungskoeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ können die p^f algebraischen Werte (2ª.), die Koeffizienten $e^{(i)}$ nur die p rationalen Werte $(0, 1, \dots p-1)$ annehmen. Da aber auch hier die Koeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ entweder gleich Null, oder Einheiten sind, so gelten alle a. a. O. für die elementaren Rechnungsoperationen aufgestellten Definitionen und bewiesenen Sätze wörtlich auch für diese algebraischen Reihen; ich möchte daher an dieser Stelle nur auf die in § 2 jener Arbeit auf S. 60–67 durchgeführten Untersuchungen verweisen. Auch hier will ich eine ganze algebraische Zahl

$$\beta = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \pi + \varepsilon^{(2)} \pi^2 + \cdots \qquad (p)$$

abgekürzt in der Form schreiben:

$$\beta = \varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)} \varepsilon^{(2)} \dots \qquad (p),$$

während bei einer gebrochenen Zahl eben vor dem Komma noch eine endliche Anzahl von Ziffern $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \dots$ auftreten.

Ich will jetzt weiter nachweisen, daß die hier angegebene Erweiterung unseres Bereiches ausreicht, um alle n Wurzeln auch einer für den Bereich von p reduktiblen Gleichung n-ten Grades für den Bereich von p als Potenzreihen darzustellen. Während man aber im Falle einer irreduktiblen Funktion nur einen einzigen Cyklus konjugierter Reihen erhält, ergeben sich in dem allgemeineren Falle genau so viele Cyklen, als die Anzahl der für den Bereich von p irreduktiblen Faktoren der Grundgleichung beträgt, und jeder derselben enthält soviele konjugierte Wurzeln, als der Grad des betreffenden Faktors beträgt; für jeden dieser Zyklen werden natürlich die Zahlen e und f und die algebraischen Zahlen π und ε im allgemeinen verschieden sein.

Um dieses Resultat einfach herleiten zu können, untersuche ich zunächst, unter welcher Bedingung eine beliebige ganzzahlige Gleichung

$$(4.) \qquad F(y) = y^m + b_1 y^{m-1} + \cdots + b_m = 0$$

eine Wurzel

(5.) $$\gamma = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \cdots$$

besitzen kann, welche einem gegebenen Körper $K(\varepsilon, \pi)$ angehört, d. h. wann es möglich ist, bei gegebenen Werten von ε und π die Koeffizienten $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \ldots$ so zu bestimmen, daß $F(\gamma)$ durch jede noch so hohe Potenz von π teilbar ist. Wir wollen sagen, eine Zahl $\bar{\gamma}$ des Bereiches $K(\varepsilon, \pi)$ ist ein Näherungswert der r-ten Ordnung der Gleichung (4), wenn $F(\bar{\gamma})$ die Ordnungszahl r besitzt, wenn also

(4ª.) $$F(\bar{\gamma}) = \varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \cdots$$

ist. Dann gilt der folgende sehr allgemeine Satz:

Besitzt die Gleichung $F(y) = 0$ innerhalb $K(\varepsilon, \pi)$ einen Näherungswert $\bar{\gamma}$, dessen Ordnungszahl r größer ist als die doppelte Ordnungszahl von $F'(\bar{\gamma})$, ist also der Quotient

(5.) $$\frac{F(\bar{\gamma})}{F'(\bar{\gamma})^2}$$

von positiver Ordnung, so hat diese Gleichung auch innerhalb $K(\varepsilon, \pi)$ eine Wurzel, welche aus jenem Näherungswerte $\bar{\gamma}$ mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit berechnet werden kann.

In der Tat, sei $\bar{\gamma}$ eine solche Zahl von $K(\varepsilon, \pi)$, daß

(6.) $$\begin{cases} F(\bar{\gamma}) = \delta^{(r)}\pi^r + \cdots, \\ F'(\bar{\gamma}) = \varepsilon^{(\varrho)}\pi^{\varrho} + \cdots \end{cases}$$

und daß

$$r > 2\varrho$$

ist. Dann kann man zu $\bar{\gamma}$ eine solche Zahl von $K(\varepsilon, \pi)$

$$h = \xi^{(r-\varrho)}\pi^{r-\varrho} + \cdots$$

hinzufügen, daß $F(\bar{\gamma} + h)$ mindestens von der $(r+1)$-ten Ordnung wird, daß also $\bar{\gamma} + h$ ein Näherungswert der $(r+1)$-ten oder höherer Ordnung wird; durch analoges Weiterschließen ergibt sich so eine wohldefinierte Zahl des Bereiches $K(\varepsilon, \pi)$

$$\gamma = \bar{\gamma} + \xi^{(r-\varrho)}\pi^{r-\varrho} + \cdots,$$

welche unsere Gleichung befriedigt. Nun ist aber nach (6.)

$$F(\bar{\gamma}+h)=F(\bar{\gamma})+F'(\bar{\gamma})\,h+\frac{F''(\gamma)}{2!}\,h^2+\cdots$$
$$=(\delta^{(r)}+\varepsilon^{(\varrho)}\,\xi^{(r-\varrho)})\,\pi^r+\cdots;$$

denn wegen der obigen Bedingung $r > 2\varrho$ sind alle anderen Glieder von höherer als der r-ten Ordnung. Also kann man die Einheit $\xi^{(r-\varrho)}$ auf eine einzige Weise so bestimmen, daß der Koeffizient von π^ϱ selbst durch π teilbar wird; und damit ist also unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Gleichzeitig ergibt sich aus der letzten Formel, daß die Wurzel γ der Gleichung $F(y)=0$ dem Näherungswert r-ter Ordnung $\bar{\gamma}$ unter dieser Voraussetzung für den Modul $\pi^{r-\varrho}$ kongruent ist.

Derselbe Satz gilt auch dann, wenn die Koeffizienten $b_1, b_2, \dots b_m$ der zu untersuchenden Gleichung (4.) nicht dem Bereiche $K(1)$, sondern dem Bereiche $K(p)$ oder dem Bereiche $K(\varepsilon, \pi)$ angehören; denn der soeben geführte Beweis gilt ohne jede Einschränkung auch in jedem von diesen beiden Fällen.

Ich benutze diesen Satz zunächst zum Beweise der Tatsache, daß auch jede für den Bereich von p irreduktible Gleichung

$$(7.)\qquad F(y)=y^n+b_1\,y^{n-1}+\cdots+b_n=0\qquad (p),$$

deren Koeffizienten nicht gewöhnliche ganze Zahlen von $K(1)$, sondern ganze Potenzreihen des Bereiches $K(p)$ sind, innerhalb eines geeignet gewählten Bereiches $K(\varepsilon, \pi)$ eine Wurzel besitzt.

Zu diesem Zwecke betrachte ich einen Näherungswert von $F(y)$

$$(7^a.)\qquad F_r(y)=y^n+b_1^{(r)}\,y^{n-1}+\cdots+b_n^{(r)},$$

dessen Ordnungszahl r nur größer als die Ordnungszahl der Diskriminante $D(F)$ von $F(y)$ angenommen werden soll. Dann bestehen modulo p^r die drei Kongruenzen:

$$(8.)\qquad \left.\begin{aligned} F(y)&\equiv F_r(y)\\ F'(y)&\equiv F'_r(y)\\ D(F)&\equiv D(F_r)\end{aligned}\right\}\qquad (\text{mod}\, p^r).$$

Die Gleichung

$$F_r(y)=0\qquad (p)$$

hat nun lauter ganzzahlige Koeffizienten des Bereiches $K(1)$; nach dem in

dieser Arbeit gegebenen Beweise existiert also ein Bereich $K(\varepsilon, \pi)$, innerhalb dessen sie eine Wurzel

$$\bar{\gamma} = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \varepsilon^{(2)}\pi^2 + \cdots$$

besitzt. Substituiert man nun diese Wurzel in den beiden ersten unter den obigen Kongruenzen (8.), so ergibt sich:

$$(9.) \qquad \begin{cases} F(\bar{\gamma}) \equiv 0 & \mod p^r. \\ F'(\bar{\gamma}) \equiv F'_r(\bar{\gamma}). \end{cases}$$

Also ist $\bar{\gamma}$ ein Näherungswert der Gleichung (7.), und zwar zeigt man leicht, daß für ihn der Quotient

$$(9^a.) \qquad \frac{F(\bar{\gamma})}{F'(\bar{\gamma})^2}$$

von positiver Ordnung ist, daß also nach dem soeben bewiesenen Satze die Gleichung $F(y) = 0 \ (p)$ in demselben Bereiche $K(\varepsilon, \pi)$ auch eine Wurzel besitzt.

In der Tat sieht man sofort, daß $F'(\bar{\gamma})$ nicht einmal durch $p^{\frac{r}{n}}$ teilbar sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so folgte aus der zweiten Kongruenz (8.), daß auch $F'_r(\bar{\gamma})$ ebenfalls durch $p^{\frac{r}{n}}$, daß also wegen (8.) No. 3

$$N(F'_r(\bar{\gamma})) = D(F_r) \equiv D(F)$$

durch p^r teilbar sein müßte, während nach unserer Annahme r größer als die Ordnungszahl von $D(F)$ angenommen war. Also ist der Quotient (9ª.) wirklich von positiver Ordnungszahl, da der Zähler mindestens durch p^r, der Nenner aber nicht einmal durch $p^{\frac{2r}{n}}$ teilbar ist; hiermit ist der verlangte Beweis vollständig erbracht.

Besitzt die für den Bereich von p irreduktible Funktion n-ten Grades

$$(10.) \qquad F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

für den Bereich von p die Wurzel

$$(11.) \qquad \gamma_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(1)}\pi_1 + \varepsilon_1^{(2)}\pi_1^2 + \cdots$$

innerhalb des Bereiches $K(\varepsilon_1, \pi_1)$, sind $K(\varepsilon_2, \pi_2), \ldots K(\varepsilon_n, \pi_n)$ die n zu $K(\varepsilon_1, \pi_1)$ konjugierten Bereiche, und

(11ª.) $$\gamma_i = \varepsilon_i^{(0)} + \varepsilon_i^{(1)} \pi_i + \varepsilon_i^{(2)} \pi_i^2 + \cdots \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

die n zu γ_1 konjugierten Reihen, so folgen aus der einen Gleichung

(12.) $$F(\gamma_1) = 0 \quad (p)$$

nach dem auf S. 11 bewiesenen Satze die n Gleichungen

(12ª.) $$F(\gamma_i) = 0, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

d. h. jene Gleichung hat die n Wurzeln $\gamma_1, \ldots \gamma_n$. Das symmetrische Produkt

$$(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)$$

ist eine ganze Funktion n-ten Grades von x, deren Koeffizienten dem Bereiche $K(p)$ angehören und die mit der irreduktiblen Funktion $F(x)$ den Linearfaktor γ_1 gemeinsam hat. Also sind beide Funktionen identisch, die n konjugierten Linearfaktoren sind alle von einander verschieden, und es besteht für ein variables x die Gleichung

(13.) $$F(x) = (x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n) \quad (p).$$

Endlich folgt aus dieser Zerlegung, daß jede andere Reihe

(14.) $$\delta = \xi^{(0)} + \xi^{(1)} \varrho + \xi^{(2)} \varrho^2 + \cdots$$

eines anderen Bereiches $K(\xi, \varrho)$, welche ebenfalls eine Wurzel der irreduktiblen Gleichung (7.) für den Bereich von p ist, notwendig einer von diesen n konjugierten Reihen für den Bereich von p gleich ist. Substituiert man nämlich jene Reihe für x in (13.), so folgt aus der Gleichung:

$$0 = F(\delta) = (\delta-\gamma_1)(\delta-\gamma_2)\ldots(\delta-\gamma_n) \quad (p),$$

daß einer der Faktoren $\delta - \gamma_i$ für den Bereich von p Null sein, oder durch jede noch so hohe Potenz von p algebraisch teilbar sein muß; es ist also wirklich eine der n Gleichungen

$$\delta = \gamma_i \quad (p)$$

erfüllt, wie zu beweisen war. So ergibt sich der Satz:

Jede für den Bereich von p irreduktible Gleichung besitzt für diesen Bereich genau n und nur n Wurzeln, welche einen einzigen

Zyklus von n konjugierten Potenzreihen bilden, die nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von p fortschreiten.

Es werde nun der allgemeinste Fall betrachtet, der in der Theorie der ganzzahligen Gleichungen auftreten kann. Es sei

$$(15.) \qquad F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

eine beliebige irreduktible algebraische Gleichung mit gewöhnlichen ganzzahligen Koeffizienten. Wir stellen uns die Aufgabe, dieselbe für den Bereich einer beliebigen Primzahl p zu untersuchen. Für den Bereich von p kann die absolut irreduktible Funktion $F(x)$ in mehrere irreduktible Faktoren zerfallen. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, sie zerfalle in drei solche Faktoren. Es sei

$$(16.) \qquad F(x) = f(x)g(x)h(x) \qquad (p)$$

jene Zerlegung und es seien

$$(16^a.) \qquad \lambda, \ \mu, \ \nu \qquad (\lambda + \mu + \nu = n)$$

die Grade jener drei Faktoren.

Dann besitzt zunächst die Gleichung

$$f(x) = 0 \qquad (p)$$

innerhalb eines geeignet gewählten Körpers $K(\varepsilon_1, \pi_1)$ eine Wurzel

$$\gamma_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(1)} \pi_1 + \varepsilon_1^{(2)} \pi_1^2 + \cdots \qquad (p).$$

Sind dann $K(\varepsilon_2, \pi_2), \ldots K(\varepsilon_\lambda, \pi_\lambda)$ die λ zu $K(\varepsilon_1, \pi_1)$ konjugierten Körper, und

$$(17.) \qquad \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\lambda$$

die λ zu γ_1 konjugierten Potenzreihen, so sind auch diese sämtlich Wurzeln der obigen Gleichung (15.), und es besteht die Identität

$$f(x) = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \ldots (x - \gamma_\lambda) \qquad (p).$$

Es mögen in derselben Weise

$$(17^a.) \qquad \delta_1, \ldots \delta_\mu; \ \zeta_1, \ldots \zeta_\nu$$

die Wurzeln der beiden anderen irreduktiblen Gleichungen $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$ für den Bereich von p sein. Dann ergibt sich für die gegebene Funktion $F(x)$ die folgende Zerlegung in Linarfaktoren:

$$F(x) = (x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_\lambda)\cdot(x-\delta_1)\dots(x-\delta_\mu)\cdot(x-\zeta_1)\dots(x-\zeta_\nu) \qquad (p).$$

Es besteht also der Fundamentalsatz:

Jede ganzzahlige Gleichung $F(x)=0$ besitzt für den Bereich einer beliebigen Primzahl p genau so viele Wurzeln, als ihr Grad angibt, und diese ordnen sich in so viele Zyklen konjugierter Reihen an, als die Zahl der für den Bereich von p irreduktiblen Faktoren beträgt.

§ 7.

Jede Gleichung n-ten Grades besitzt für den Bereich einer beliebigen Primzahl p genau so viele Wurzeln, als ihr Grad angibt, und jede von ihnen ist durch eine Potenzreihe von der Form

$$\varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \cdots \qquad (p)$$

mit jeder vorgegebenen Genauigkeit dargestellt. Hier ist π eine ganze algebraische Zahl des Bereiches $K(p, \alpha)$, welche genau durch $p^{\frac{1}{e}}$ algebraisch teilbar ist, und die Koeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ sind modulo p reduzierte ganze Funktionen einer Zahl ε, welche einer modulo π irreduktiblen Kongruenz f-ten Grades

$$(1.) \qquad g(x) = x^f + g_1 x^{f-1} + \cdots + g_f \equiv 0 \qquad (\text{mod } \pi)$$

genügt.

Ohne dieses Resultat in irgend einem wesentlichen Punkte zu ändern, kann man nun die beiden algebraischen Zahlen ε und π durch andere geeignet gewählte ersetzen, und zwar kann man für ε irgend eine Zahl

$$(2.) \qquad \bar{\varepsilon} = \varepsilon + a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots$$

wählen, welche nur zu ε modulo π kongruent ist, und für π irgend eine Zahl

$$(3.) \qquad \bar{\pi} = b_1\pi + b_2\pi^2 + \cdots,$$

für welche nur $b_1 \gtrless 0$ ist, welche also ebenfalls genau durch $p^{\frac{1}{e}}$ algebraisch teilbar ist.*) Aus der großen Menge der so sich ergebenden äquivalenten

*) Vergl. *K. Hensel,* Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen. Math. Annalen, Bd. 50, S. 301—336 a. S. 302—306.

Grundzahlen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\pi}$ will ich nun die einfachsten und brauchbarsten auswählen.

Zunächst kann und will ich die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ in (2.) so bestimmen, daß $\bar{\varepsilon}$ nicht bloß die Kongruenz (1.) für den Modul π befriedigt, sondern daß $\bar{\varepsilon}$ eine Wurzel der Gleichung

$$(4.) \qquad g(x) = 0 \qquad (p)$$

für den Bereich von p ist. Dies ist nach dem auf S. 24 bewiesenen Satze stets möglich. Da nämlich ε nach (1.) ein Näherungswert für eine Wurzel jener Gleichung (4.) ist, deren Ordnungszahl gleich oder größer als Eins ist, und da $g'(\varepsilon)$ wegen der Irreduktibilität von $g(x)$ durch π nicht teilbar ist, so ist der Quotient

$$\frac{g(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)^2}$$

von positiver Ordnung, und nach jenem Satze kann $\bar{\varepsilon}$ in der obigen Form stets so bestimmt werden, daß $\bar{\varepsilon}$ eine Wurzel der Gleichung (4.) ist. Wir wollen annehmen, daß bereits ε selbst eine Wurzel jener Gleichung ist.

Um nun auch die Entwicklungszahl π durch eine einfachere zu ersetzen, stelle ich die folgende Überlegung an: Ersetzt man in der Gleichung

$$\pi^e = p\varepsilon = p(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \pi + \cdots) \qquad (p)$$

die Potenzen $\pi^e, \pi^{2e}, \ldots$ auf der rechten Seite wieder bezw. durch $p\varepsilon, p^2\varepsilon^2, \ldots$ und faßt dann die mit $1, \pi, \ldots \pi^{e-1}$ multiplizierten Glieder zusammen, so erkennt man, daß π die Wurzel einer Gleichung e-ten Grades

$$(5.) \qquad \psi(\pi) = \pi^e + B_{e-1}\pi^{e-1} + B_{e-2}\pi^{e-2} + \cdots + B_0 = 0 \qquad (p)$$

ist, deren Koeffizienten sämtlich die Form haben

$$B_i = b_i^{(1)} p + b_i^{(2)} p^2 + \cdots \qquad (i = 0, 1, \ldots e-1)$$

also wohldefinierte ganze Zahlen des Bereiches $K(p, \varepsilon)$ sind, von denen der letzte Koeffizient B_0 auch durch keine höhere als die erste Potenz von p teilbar ist. Ich will nun π durch eine äquivalente Zahl $\bar{\pi}$ von der Form (3.) ersetzen, welche einer Gleichung

$$(5^a.) \qquad \psi_r(x) = x^e + B_{e-1}^{(r)} x^{e-1} + B_{e-2}^{(r)} x^{e-2} + \cdots + B_0^{(r)} = 0$$

genügt, deren linke Seite ein Näherungswert einer genügend hohen Ordnung von (5.) ist; ihre Koeffizienten sind also ganze rationale Zahlen von der Form

$$B_i^{(r)} = b_1^{(i)} p + \cdots + b_r^{(i)} p^r,$$

welche bei der r-ten Potenz von p abbrechen. Zu diesem Zwecke bilde ich die Ableitung von (5.) nach π

$$(5^b.) \quad \psi'(\pi) = e\pi^{e-1} + (e-1)B_{e-1}\pi^{e-2} + \cdots + iB_i\pi^{i-1} + \cdots + B_1$$

und bestimme ihre Ordnungszahl modulo π. Ist nun in der Reihe der Koeffizienten

$$(5^c.) \qquad B_1, 2B_2, \ldots iB_i, \ldots (e-1)B_{e-1}, e$$

von $\psi'(\pi)$ iB_i der erste, welcher die kleinste Potenz von p enthält, so erkennt man ohne weiteres, daß die Ordnungszahl ϱ von $\psi'(\pi)$ mit der Ordnungszahl des Gliedes

$$iB_i\pi^{i-1}$$

übereinstimmt, da alle e Glieder von $\psi'(\pi)$ offenbar verschiedene Ordnungszahl besitzen. Ich setze nun $r = 2\varrho$; dann ist $\psi_r(\pi)$ in (5ᵃ.) mindestens durch $\pi^{2\varrho+1}$ teilbar, weil sich $\psi_r(\pi)$ von $\psi(\pi) = 0$ um lauter Glieder von höherer als der 2ϱ-ten Ordnung unterscheidet. Andererseits ist auch

$$\psi_r'(\pi) \equiv \psi'(\pi) \qquad (\text{mod } \pi^{2\varrho+1}),$$

also auch genau durch π^ϱ teilbar. Daher ist der Quotient

$$\frac{\psi_r(\pi)}{(\psi_r'(\pi))^2}$$

mindestens durch π teilbar, also jedenfalls von positiver Ordnung. Also kann man in der Tat eine Zahl $\bar{\pi}$ finden, welche der Gleichung

$$\psi_r(x) = 0 \qquad (p)$$

genügt, und welche nach der auf S. 25 oben gemachten Bemerkung der Zahl π modulo $\pi^{r-\varrho} = \pi^\varrho$ kongruent ist.

Ist die Ordnungszahl e von π durch p nicht teilbar, so ist nach (5ᵇ.) und (5ᶜ.)

$$\psi'(\pi) \sim e\pi^{e-1},$$

besitzt also die Ordnungszahl $e-1$, und man kann dann, wie man leicht erkennt (vgl. a. a. O. § 2), $\psi(\pi)$ durch

$$\psi_0(\pi) = \pi^e - B_0 = \pi^e - p\,\varepsilon_0 = 0$$

ersetzen, wo ε_0 eine reduzierte Einheit ist.

Es ergibt sich also das Schlußresultat:

Jede Gleichung n-ten Grades besitzt für den Bereich einer jeden Primzahl genau so viele von einander verschiedene Wurzeln, als ihr Grad angibt. Jede derselben ist eine Potenzreihe in einem Bereiche $K(\varepsilon, \pi)$, in welchem ε eine der Wurzeln der irreduktiblen *Gleichung* f-ten Grades

$$g(\varepsilon) = \varepsilon^f + g_{f-1}\varepsilon^{f-1} + \cdots + g_0 = 0 \qquad (p)$$

ist, und π einer irreduktiblen *Gleichung* e-ten Grades

$$\psi(\pi) = \pi^e + p c_{e-1}\pi^{e-1} + \cdots + p c_0 = 0 \qquad (p)$$

genügt, wo die c_i bestimmte ganze Zahlen von $K(\varepsilon)$ sind und c_0 durch p nicht teilbar ist.

Das hier gegebene Resultat ist eine Erweiterung des Gaußschen Fundamentalsatzes der Algebra, daß jede algebraische Gleichung genau so viele reelle und komplexe Wurzeln besitzt, als ihr Grad angibt, und daß diese sich als reelle bezw. komplexe Dezimalbrüche darstellen lassen.

Mit den hier gegebenen Mitteln läßt sich dieser Gaußsche Satz ebenfalls beweisen, und man kann auf ihn dann eine neue Theorie der Einheiten gründen, welche mit der der idealen Zahlen wörtlich übereinstimmt. Hierauf soll in einer späteren Arbeit genauer eingegangen werden.

Über eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen in der Variationsrechnung.

Zusatz zu der Abhandlung des Verfassers in Bd. 125 dieses Journals.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Die von *Jacobi* im 17. Bande dieses Journals begründete Theorie, die zweite Variation eines einfachen Integrals mit einer unbekannten Funktion zu untersuchen, welche *Hesse* im 54. Bande weiter entwickelt hat, ist in der Abhandlung des Verfassers in Bd. 125 mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Funktionen als Koeffizienten in Verbindung gebracht worden, und zwar kommen hierbei von letzterer Theorie die Grundzüge in Betracht.

Es war dort die Voraussetzung gemacht worden, daß in einem Streifen in der Konstruktionsebene der komplexen unabhängigen Variablen, welcher die Strecke auf der Achse des Reellen zwischen den Integrationsgrenzen im Innern enthält, die durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrales auf dieser Strecke ermittelte reelle Funktion eine einwertige und stetige analytische Funktion sei. Die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung des Ausdruckes unter dem Integralzeichen, die nach der Funktion und deren Differentialquotienten genommen sind, sollten in demselben Streifen einwertige und stetige analytische Funktionen der unabhängigen Variablen sein. Die *Jacobi*sche Bedingung sei erfüllt, daß die zweite partielle Ableitung jenes Ausdruckes nach dem höchsten Differentialquotienten genommen zwischen den Integrationsgrenzen nicht verschwindet.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so hat, wie in der oben genannten Abhandlung nachgewiesen ist, die gefundene Kurve die Eigenschaft, daß

für dieselbe ein Maximum oder Minimum des Integrales — je nach dem Vorzeichen der zuletzt genannten zweiten partiellen Ableitung — eintritt, wenn im allgemeinen die Scharen der Nachbarkurven zum Vergleiche herangezogen werden. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß auf Grund der *Jacobi*schen Theorie und der früher angewandten Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen sich die damals gemachten Einschränkungen noch im wesentlichen beseitigen lassen.

Unter der angegebenen Voraussetzung steht also bei den *ursprünglich gegebenen Integrationsgrenzen* das Maximum bezüglich Minimum des Integrals *von vornherein fest,* wenn die gefundene Kurve gegenüber den Scharen der Nachbarkurven eintritt, diese Scharen der Nachbarkurven *in entschiedener Allgemeinheit* genommen.

Mögen diese Untersuchungen über Variationsrechnung dem Andenken *Jacobi*s gewidmet sein als Beitrag zu der in das Jahr 1904 fallenden Jahrhundertfeier seines Geburtstages.

1.

Rückblick auf den Inhalt der ersten Abteilung in der Abhandlung des Verfassers Bd. 125.

Dort war (Nr. 1) das Integral

$$\int_a^b f(x, y, y^{(1)}, \dots y^{(n)})\, dx \tag{1.}$$

vorgelegt, f eine reelle Funktion von $x, y, y^{(1)}$ bis $y^{(n)}$; y die unbekannte reelle Funktion von x, $y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$, a und b reell. Für y wird gesetzt $y + \varepsilon z$, wo ε eine in der Nähe von Null variierende reelle Größe ist, z eine beliebige reelle Funktion von x, welche mit ihren Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung von a bis b endlich und stetig bleibt und mit den $n-1$ ersten Ableitungen in $x = a$ und b verschwindet. z möge zunächst in beliebiger Nähe einer endlichen Anzahl von Punkten zwischen a und b Null sein.

Der erste Differentialquotient des Integrals (1.) nach ε, die erste Variation, muß für $\varepsilon = 0$ verschwinden. Dies führt auf die Differentialgleichung, worin

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} = f'(y^{(p)}) \tag{2.}$$

gesetzt ist,

$$(3.)\quad f'(y) - \frac{d}{dx} f'(y^{(1)}) + \frac{d^2}{dx^2} f'(y^{(2)}) - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f'(y^{(n)}) = 0.$$

Aus dieser Differentialgleichung gehe y zwischen a und b als reelle Funktion hervor, die mit den $n-1$ ersten Ableitungen in den Endpunkten $x=a$ und b gegebene Werte hat.

Der zweite Differentialquotient des Integrals (1.) nach ε, die zweite Variation, wird für $\varepsilon = 0$ durch folgenden Ausdruck gegeben. Die Bezeichnungen

$$(4.)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}} = a_{pq},$$

$$(5.)\quad \frac{d^r z}{dx^r} = z^{(r)}$$

und

$$(6.)\quad 2\psi = a_{00} zz + 2a_{01} zz^{(1)} + 2a_{11} z^{(1)} z^{(1)} + \cdots$$
$$+ 2a_{n-1,n} z^{(n-1)} z^{(n)} + a_{nn} z^{(n)} z^{(n)},$$

$$(7.)\quad \frac{\partial \psi}{\partial z^{(r)}} = \psi'(z^{(r)})$$

seien angenommen. Um den Ausdruck der zweiten Variation von (1.), die durch Differentiation unter dem Integralzeichen hergestellt ist, für $\varepsilon = 0$ umzuformen mit Bezugnahme darauf, daß z mit den $n-1$ ersten Ableitungen in $x=a$ und b verschwindet, wird

$$(8.)\quad \psi'(z) - \frac{d}{dx} \psi'(z^{(1)}) + \frac{d^2}{dx^2} \psi'(z^{(2)}) - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \psi'(z^{(n)})$$

betrachtet. Letzterer Ausdruck läßt sich immer auf die Form bringen

$$(9.)\quad \mathfrak{A}_0 z - \frac{d}{dx} \mathfrak{A}_1 z^{(1)} + \frac{d^2}{dx^2} \mathfrak{A}_2 z^{(2)} - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \mathfrak{A}_n z^{(n)} = \Psi(z),$$

worin die $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-1}$ bis $\mathfrak{A}_0$ ganze rationale Funktionen der Größen a_{pq} in (6.) und deren Ableitungen nach x sind,

$$(10.)\quad \mathfrak{A}_n = a_{nn} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}.$$

Die zweite Variation des Integrals (1.) für $\varepsilon = 0$ erhält nun den Ausdruck

$$(11.)\quad \int_a^b z \Psi(z)\, dx.$$

Es ist zu untersuchen, ob der Ausdruck (11.) bei den verschiedenen Funktionen z ein und dasselbe Vorzeichen behält. Für das Integral (11.) ergibt sich, da z mit den $n-1$ ersten Ableitungen in $x=a$ und b verschwindet, nach der *Jacobi*schen Theorie die Darstellung

$$\int_a^b a_{nn}(u\,v_1^{(1)}\,w_2^{(2)}\ldots z_n^{(n)})^2\,dx \tag{12.}$$

(Abh. Bd. 125 d. J. Nr. 1 (30.)). Hier sind es n Integrale u, v, w usw. der homogenen linearen Differentialgleichung $2n$-ter Ordnung

$$\frac{1}{\mathfrak{A}_n}\Psi(z)=0, \tag{13.}$$

vermittelst welcher die n a. a. O. angegebenen Funktionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}\ldots$ gebildet werden. Letztere Funktionen sollen auf der Strecke von a bis b reell, endlich und stetig sein und dort nirgends verschwinden. $z_n^{(n)}$ geht aus z durch die Substitutionen

$$z=u\,z_1,\quad \frac{dz_1}{dx}=z_1^{(1)}=v_1^{(1)}\,z_2^{(1)},\quad \frac{dz_2^{(1)}}{dx}=z_2^{(2)}=w_2^{(2)}\,z_3^{(2)},\ldots \tag{14.}$$

hervor. Der in (12.) vorkommende Ausdruck

$$u\,v_1^{(1)}\,w_2^{(2)}\ldots z_n^{(n)} \tag{15.}$$

ist von *Hesse* (vgl. Abh. des Verfassers Bd. 125 d. J., S. 7, 8) als Quotient

$$\frac{\triangle}{\triangle_n} \tag{16.}$$

dargestellt, wo

$$\triangle_n=u^n\,(v_1^{(1)})^{n-1}\,(w_2^{(2)})^{n-2}\ldots \tag{17.}$$

die Determinante der n Funktionen $u, v, w\ldots$ und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen ist,

$$\triangle=u^{n+1}\,(v_1^{(1)})^n\,(w_2^{(2)})^{n-1}\ldots z_n^{(n)} \tag{18.}$$

die Determinante der $n+1$ Funktionen u, v, w bis z und ihrer n ersten Ableitungen.

Durch Integration der Differentialgleichung (3.) soll also y als Funktion von x mit $2n$ Konstanten hervorgehen und es sollen letztere so bestimmt sein, daß y mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen in $x=a$ und b vorgeschriebene Werte annimmt, y sei nun zwischen a und b reell.

Alsdann wird, wie in der Einleitung angegeben (siehe ausführlich Abh. Bd. 125 d. J., S. 10), *folgende Voraussetzung gemacht.* In einem Streifen T in der Konstruktionsebene der komplexen Variablen x, welcher die Strecke auf der Achse des Reellen zwischen a und b im Innern enthält, sei die ermittelte Funktion y eine einwertige und stetige analytische Funktion von x. — Die Funktion $f(x, y, y^{(1)}, \dots y^{(n)})$ (1.) und deren partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach $y, y^{(1)}$ bis $y^{(n)}$ sollen, wenn $y, y^{(1)}$ bis $y^{(n)}$ unabhängig genommen werden, auf reellen Strecken, welche die Werte dieser Variablen, wenn x von a bis b sich ändert, im Innern enthalten, endliche und stetige reelle Funktionen von $x, y, y^{(1)}$ bis $y^{(n)}$ sein. — Ferner seien die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}}, (p, q = 0, \dots n)$ in dem Streifen T einwertige und stetige analytische Funktionen von x und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}} = a_{nn}$ soll auf der Strecke x von a bis b nirgends verschwinden.

Die Größe $\mathfrak{A}_n = a_{nn}$ in (13.) verschwindet dann in einem Streifen wie T nicht und es war in Abh. Bd. 125 d. J. auf die Differentialgleichung (13.) die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Funktionen als Koeffizienten in den Grundzügen angewandt worden. Hierdurch hatte sich folgendes Ergebnis herausgestellt.

Auf der Strecke x von a bis b wird eine endliche Anzahl von Punkten ξ_1, ξ_2 bis ξ_λ und es werden aus einander liegende Teilstrecken

$$(19.) \qquad \eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda,$$

von denen jede einen Punkt ξ im Innern enthält, ausgenommen. Diese Teilstrecken können beliebig klein gewählt werden, sollen aber fixiert sein. Von der Differentialgleichung (13.) gibt es n Integrale $u, v, w, \dots$, die in einem Streifen wie T einwertige und stetige analytische Funktionen und für reelle x reell sind, aus welchen n Funktionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)} \dots$ wie in (12.) hervorgehen, die in einem Gebiete innerhalb T, welches die Strecke des Reellen von a bis b im Innern enthält, abgesehen von den Punkten ξ (unter diesen kann auch a, b sein) einwertige und stetige und von Null verschiedene analytische Funktionen sind und für reelle x reell.

Der Integrationsweg in (11.) von a bis b wird in Teile geteilt, nämlich die Strecken η (19.) und die Strecken zwischen je zwei η, bezüglich zwischen a oder b und dem benachbarten η. Die Funktion z, welche mit den $2n$ ersten Ableitungen von a bis b reell, endlich und stetig

ist und mit den $n-1$ ersten Ableitungen in a und b verschwindet, wird auf den Strecken η gleich Null gesetzt, soll aber nicht allenthalben verschwinden. Auf je einer der übrigen Strecken sind bei dem bezüglichen Integral inbetreff der Funktionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)} \dots$ die Bedingungen erfüllt, die auf den Ausdruck des Integrales unter der Form (12.) führen. Sobald dort z nicht allenthalben verschwindet, hat dieses Integral das Vorzeichen von a_{nn}. *Das Integral* (11.) *hat also bei jeder solchen Funktion* z *das Vorzeichen von* a_{nn}.

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich darum, für das Integral (11.) auch solche Funktionen z, welche mit den $2n$ ersten Ableitungen von a bis b endlich und stetig sind und mit den $n-1$ ersten Ableitungen in a und b verschwinden, heranzuziehen, *die auf den Teilstrecken* η (19.) *nicht verschwinden.*

Die in Nr. 3 der Abhandlung Bd. 125 d. J. angegebene Verallgemeinerung, wobei, wenn in dem Integrale (1.) ursprünglich $y+\varepsilon z$ stand, an Stelle von z gesetzt wird $z+\varepsilon Z$, wo z die frühere Funktion ist und Z eine Funktion von x und ε von der a. a. O. genannten Beschaffenheit, bleibt alsdann auch bei dem jetzt zu bildenden z bestehen.

2.

Ausführung der am Schlusse von Nr. 1 bezeichneten Aufgabe.

I. Bei jedem der Punkte ξ auf den Teilstrecken η Nr. 1, (19.) werden vermittelst der homogenen linearen Differentialgleichung $\frac{1}{\mathfrak{A}_n}\Psi(z)=0$, Nr. 1, (13.) solche n Funktionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}, \dots$ in Nr. 1, (12.) genommen, welche für ξ und in der Nähe von ξ einwertige, stetige und von Null verschiedene analytische Funktionen sind, die für reelle x reelle Werte haben. Dies geschieht nach den Angaben in Abh. Bd. 125 d. J., S. 11. Eine Strecke in diesem Gebiete auf der Achse des Reellen zwischen a und b, welche nur einen der Punkte ξ im Innern enthält, sei die Strecke η Nr. 1, (19.). Die Endpunkte von η seien a' und b'. Nun sind vermittelst dieser Funktionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}, \dots$ für das Integral

$$(1). \qquad \int_{a'}^{b'} z\,\Psi(z)\,dx$$

die Bedingungen, die auf die Darstellung desselben Nr. 1, (12.) führen, erfüllt. Wenn also auf der Strecke η die Funktion z eine beliebige reelle

Funktion ist, die mit den $2n$ ersten Ableitungen endlich und stetig bleibt und in a' und b' mit den $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet, aber nicht allenthalben verschwindet, so hat das Integral (1.) das Vorzeichen von a_{nn}.

Die Endpunkte dieser Strecken η Nr. 1, (19.) seien allgemein durch ξ' bezeichnet (zu den Punkten ξ' kann auch a oder b gehören). Das Integral Nr. 1, (11.) ist gleich der Summe der Integrale zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten ξ' und der Integrale zwischen a bezüglich b und dem nächsten Punkte ξ'. Die Funktion z in Nr. 1, (11.), welche mit den $2n$ ersten Ableitungen von a bis b reell, endlich und stetig, aber nicht allenthalben gleich Null sein soll, sei jetzt außer in a und b *in den Punkten* ξ' mit den $n-1$ ersten Ableitungen gleich Null, im Übrigen beliebig, dann hat nach dem in Nr. 1 und im Vorhergehenden Gesagten das Integral Nr. 1, (11.) das Vorzeichen von a_{nn}.

II. Nun werden bei irgend einem Punkte ξ' in I wieder von der Differentialgleichung $\frac{1}{\mathfrak{A}_n}\Psi(z)=0$, Nr. 1, (12.) aus solche n Funktionen u, $v_1^{(1)}$, $w_2^{(2)}, \dots$ Nr. 1, (12.) hergestellt, die für ξ' und in der Nähe dieses Punktes einwertige, stetige und von Null verschiedene analytische Funktionen und für reelle x reell sind. Eine Strecke in diesem Gebiete auf der Achse des Reellen zwischen a und b, welche nur einen der Punkte ξ' im Innern enthält, sei η'. Die Teilstrecken η' bei den verschiedenen Punkten ξ' sollen aus einander liegend genommen werden. Die Endpunkte einer Strecke η' seien a'' und b''.

An Stelle von z in Nr. 1, (11.) sei auf der Strecke η' gesetzt $s+(1+\varrho)t$, wo ϱ eine reelle Konstante ist. Die reellen Funktionen s und t sollen von a'' bis b'' mit den $2n$ ersten Ableitungen endlich und stetig sein, t soll in a'' und b'' mit denselben Ableitungen verschwinden, aber nicht allenthalben Null sein. Hierdurch ergibt sich

$$(2.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{a''}^{b''}(s+(1+\varrho)t)\,\Psi(s+(1+\varrho)t)\,dx \\ \displaystyle=\int_{a''}^{b''}s\,\Psi(s)\,dx+(1+\varrho)^2\int_{a''}^{b''}t\,\Psi(t)\,dx+(1+\varrho)\int_{a''}^{b''}(s\,\Psi(t)+t\,\Psi(s))\,dx. \end{cases}$$

Das Integral

$$(3.)\qquad \int_{a''}^{b''}t\,\Psi(t)\,dx$$

hat dann wieder das Vorzeichen von a_{nn}. Der Ausdruck

$$(4.)\qquad (1+\varrho)^2\int_{a''}^{b''} t\,\Psi(t)\,dx + (1+\varrho)\int_{a''}^{b''}(s\,\Psi(t)+t\,\Psi(s))\,dx$$

hat zum Differentialquotienten nach ϱ genommen

$$(5.)\qquad 2(1+\varrho)\int_{a''}^{b''} t\,\Psi(t)\,dx + \int_{a''}^{b''}(s\,\Psi(t)+t\,\Psi(s))\,dx.$$

Diese Größe möge für $\varrho=\varrho_1$ verschwinden. Dann findet für $\varrho>\varrho_1$ mit wachsendem ϱ die Änderung des Ausdrucks (4.) in der Richtung statt, welche durch das Vorzeichen von a_{nn} bestimmt wird. Für positive Werte $1+\varrho$, bei denen $1+\varrho>2(1+\varrho_1)$ ist, hat der Ausdruck (4.) selbst das Vorzeichen von a_{nn}.

III. Jetzt sei die Funktion z in dem Integrale Nr. 1, (11.) eine beliebige reelle Funktion, welche von $x=a$ bis b mit den $2n$ ersten Ableitungen endlich und stetig bleibt und in a und b mit den $n-1$ ersten Ableitungen gleich Null ist, aber nicht allenthalben verschwindet. Die $(2n+1)$-te Ableitung von z soll auf der Strecke $x=a$ bis b, abgesehen von isolierten Punkten, die in endlicher oder unendlich großer Anzahl auftreten, endlich und stetig sein.

Die Punkte ξ' sind die in I genannten Punkte. Wenn z in einem Punkte ξ' nicht mit den $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet, so wird dieser Punkt in folgender Weise verlegt. Durch Verkleinerung der angrenzenden Strecke η in I kann erzielt werden, daß dieser Punkt ξ' innerhalb einer Strecke liegt, wo z nirgends verschwindet und wo zugleich die $(2n+1)$-te Ableitung von z endlich und stetig ist. Bei einem solchen Punkte ξ' wird nun die in II bezeichnete Strecke η' so genommen, daß dieselbe auch innerhalb der vorhin genannten Strecke liegt. Die Endpunkte von η' waren in II durch a'' und b'' bezeichnet.

Die gegebene Funktion z wird auf dieser Strecke η' gleich $s+t$ gesetzt. Die Funktion s wird so bestimmt, daß dieselbe und ihre $2n$ ersten Ableitungen von a'' bis b'' reell, endlich und stetig sind, in a'' und b'' bezüglich mit z und dessen $2n$ ersten Ableitungen übereinstimmen, und daß s mit den $n-1$ ersten Ableitungen in dem Punkte ξ' verschwindet. Eine solche Funktion s ist für $x=a''$ bis ξ' — für $x=\xi'$ bis b'' findet das Entsprechende statt — folgende:

$$(6.)\quad \begin{cases} s=(x-\xi')^{2n+1}\{\varphi(x)+(x-a'')^{2n+1}\chi(x)\}, \\ \varphi(x)=c_0+c_1(x-a'')+c_2(x-a'')^2+\cdots+c_{2n}(x-a'')^{2n}, \end{cases}$$

wo $\chi(x)$ eine reelle Funktion, die mit den $2n$ ersten Ableitungen von a'' bis ξ' endlich und stetig ist. Die Konstanten c_0, c_1 bis c_{2n} werden sukzessive aus den Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} (z)_{x=a''}=\{(x-\xi')^{2n+1}\varphi(x)\}_{x=a''}, \\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=a''}=\left\{(x-\xi')^{2n+1}\frac{d\varphi(x)}{dx}+\varphi(x)\frac{d}{dx}(x-\xi')^{2n+1}\right\}_{x=a''} \\ \cdot\;\cdot \end{cases}$$

mittelst der Werte von z und seinen $2n$ ersten Ableitungen in $x=a''$ bestimmt.

Die Funktion $z=f(x)$ hat auf der Strecke $x=a''$ bis ξ' die Entwicklung nach der *Taylor*schen Reihe mit dem Restgliede bei $(x-a'')^{2n+1}$, wo $\frac{d^r f(x)}{dx^r}=f^{(r)}(x)$ gesetzt ist:

$$(8.)\quad \begin{cases} z=f(a'')+(x-a'')f'(a'')+\frac{(x-a'')}{1\cdot 2}f''(a'')+\cdots \\ \qquad\qquad +\frac{(x-a'')^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(a''+\theta(x-a'')), \end{cases}$$

$0\ldots\theta\ldots 1$. Die Funktion $(x-\xi')^{2n+1}\varphi(x)$ nach Potenzen von $x-a''$ entwickelt, gibt ein Polynom inbezug auf $x-a''$, dessen Glieder bis zu $(x-a'')^{2n}$ mit denen in der Entwicklung von z (8.) übereinstimmen, hierauf folgt ein Ausdruck $(x-a'')^{2n+1}\psi(x)$.

Es ist

$$(9.)\quad z-s=(x-a'')^{2n+1}\left\{\frac{f^{(2n+1)}(a''-\theta(x-a''))}{(2n+1)!}-\psi(x)-(x-\xi')^{2n+1}\chi(x)\right\}.$$

Der Ausdruck

$$(10.)\quad (x-a'')^{2n+1}\left\{\frac{f^{(2n+1)}(a''+\theta(x-a''))}{(2n+1)!}-\psi(x)\right\}=z-(x-\xi')^{2n+1}\varphi(x)$$

hat für $x=\xi'$ das Vorzeichen von z. Wenn derselbe auf der Strecke ξ' bis a'' Null wird, so sei dies zuerst in x_1 der Fall. Auf der Strecke x_1 bis a'' möge der absolute Wert von

$$(11.)\qquad \frac{f^{(2n+1)}(a''+\theta(x-a''))}{(2n+1)!}-\psi(x)$$

unterhalb M liegen. Dann wird $\chi(x)$ gleich einer Konstanten C gesetzt, so daß für x_1 bis a'' der absolute Betrag von

$$(12.) \qquad (x-\xi')^{2n+1}\,C$$

oberhalb eines Wertes größer als M liegt und das Vorzeichen von

$$(13.) \qquad -(x-a'')^{2n+1}(x-\xi')^{2n+1}\,C$$

innerhalb der Strecke $x=a''$ bis ξ' das von z ist. Jetzt hat die Differenz $z-s$, welche für a'' verschwindet, im übrigen auf der Strecke a'' bis ξ' das Vorzeichen von z.

In $z=s+t$ ist also nun die Funktion t auf der Strecke a'' bis b'' mit den $2n$ ersten Ableitungen reell, endlich und stetig und in a'' und b'' gleich Null; t hat innerhalb der Strecke a'' bis b'' überall das Vorzeichen von z. s ist in a'' und b'' von Null verschieden, da dies bei z der Fall ist.

IV. Bei der beliebigen Funktion z in III war auf jeder der dort genannten Strecken η' $z=s+t$ gesetzt. Es wird nun statt z die Funktion genommen, welche auf jeder dieser Strecken η' gleich s, auf den übrigen Strecken zwischen a und b gleich der ursprünglichen Funktion z ist; die so bestimmte Funktion sei durch (z) bezeichnet. Dieselbe ist von $x=a$ bis b mit den $2n$ ersten Ableitungen reell, endlich und stetig und verschwindet mit den $n-1$ ersten Ableitungen in a, b und in den Punkten ξ' (I, III), ist aber nicht allenthalben gleich Null. (z) erfüllt also die Bedingungen in I. Das Integral Nr. 1, (11.) hat mithin, wenn (z) an Stelle von z gesetzt wird, das Vorzeichen von a_{nn}. Zu diesem Integral tritt dann, wenn in dem Integral Nr. 1, (11.) das ursprüngliche z aus III vorkommt, auf jeder der Strecken η' gemäß II hinzu

$$(14.) \qquad \int_{a''}^{b''} t\,\Psi(t)\,dx+\int_{a''}^{b''}(s\,\Psi(t)+t\,\Psi(s))\,dx.$$

Nun wird auf einer solchen Strecke η' an Stelle von $z=s+t$ gesetzt $s+(1+\varrho)t$, wo ϱ eine reelle Konstante gleich oder größer als Null sein soll, die von einer Strecke η' zur anderen eine andere sein kann. Auf den übrigen Strecken zwischen a und b tritt das ursprüngliche z ein. Die so erhaltene Funktion sei durch $((z))$ bezeichnet. Dieselbe ist von a bis b mit den $2n$ ersten Ableitungen reell, endlich und stetig, verschwindet mit den $n-1$ ersten Ableitungen in a und b, aber nicht allenthalben.

In dem Integral Nr. 1 (11.), worin jetzt $((z))$ an Stelle von z steht, wird auf jeder Strecke η' die positive Größe ϱ oberhalb des in II bezeichneten Wertes ϱ_1 genommen, so daß mit wachsendem ϱ die Änderung des gesamten Integrales Nr. 1, (11.), worin $z = ((z))$ ist, in der Richtung vor sich geht, welche dem Vorzeichen von a_{nn} entspricht. Es gibt dann weiter nach II Werte, sodaß, sobald die positiven Größen ϱ auf den Strecken η' über diese Werte hinaus wachsen, *das Integral Nr. 1,* (11.) *für* $z = ((z))$ *fortwährend das Vorzeichen von* a_{nn} *hat.*

Die ursprüngliche Funktion z erhält dabei auf einer Strecke η' den Zuwachs ϱt, der innerhalb der Strecke η' *dasselbe Vorzeichen hat, welches* z *auf dieser Strecke besitzt.*

Die in I und IV enthaltenen Angaben über die Funktion z in dem Integrale Nr. 1, (11.) liefern die Verallgemeinerung gegenüber dem in Nr. 1 betrachteten Falle, wo z auf einzelnen Teilstrecken zwischen a und b gleich Null gesetzt war.

3.

Die isometrischen Aufgaben; siehe Abhandlung Bd. 125, zweite Abteilung.

Die erste Variation des Integrales Nr. 1, (1.), worin $y + \varepsilon z$ für y gesetzt ist, soll für $\varepsilon = 0$ verschwinden, während zugleich die erste Variation eines anderen Integrales Abh. Bd. 125, Nr. 4, (2.) für $\varepsilon = 0$ verschwindet. Die Funktion z erhält nach Abh. Bd. 125, Nr. 4 den Ausdruck

$$z = \frac{\varphi'(x)}{S}, \tag{1.}$$

wo $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ und

$$\varphi(x) = (x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}w, \tag{2.}$$

S der a. a. O. (4.) bezeichnete Differentialausdruck ist. w ist eine von $x = a$ bis b reelle Funktion mit den Ableitungen bis zur $(2n+1)$-ten Ordnung endlich und stetig, in beliebiger Nähe einer endlichen Anzahl von Punkten auf der Strecke zwischen a und b gleich Null; unter diesen Punkten sind diejenigen, für welche $S = 0$ ist, indem S auf dieser Strecke nur in einer endlichen Anzahl von Punkten verschwinden soll; im übrigen ist w beliebig. Das Verschwinden der ersten Variation des Integrales Nr. 1, (1.) führt dann auf die a. a. O. (13.) angegebene Differentialgleichung

$$Q - cS = 0. \tag{3.}$$

In bezug auf die Funktion y, welche aus dieser Differentialgleichung hervorgeht, sind nun Voraussetzungen gemacht, welche den in der Einleitung angegebenen entsprechen und in Abh. Bd. 125, Nr. 4 aufgestellt sind. Die Punkte in endlicher Anzahl, in denen S zwischen a und b verschwindet, seien ζ_1 bis ζ_μ. Die aus einander liegenden Teilstrecken zwischen a und b, von denen jede nur einen der Punkte ζ enthält, seien

$$(4.)\qquad \Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_\mu.$$

Dieselben können beliebig klein gewählt werden, sollen aber fixiert sein. w wird nun auf diesen Teilstrecken und auf den Teilstrecken η Nr. 1, (19.) gleich Null gesetzt, soll aber nicht allenthalben zwischen a und b verschwinden. Alsdann verschwindet die erste Variation der beiden Integrale für $\varepsilon = 0$ und die zweite Variation des Integrales Nr. 1, (1.) hat das Vorzeichen von a_{nn}.

Da $\varphi(x)$ für $x = a$ und b verschwindet, muß $\varphi'(x)$ zwischen a und b durch Null hindurchgehen. Die Verallgemeinerung gegen das in Abh. Bd. 125, Nr. 4 Gesagte besteht hier in der Anwendung des in Nr. 2, I Angegebenen. Die Funktion w in (2.) soll jetzt von $x=a$ bis b reell und stetig sein, ebenso seien ihre Ableitungen bis zur $(2n+1)$-ten Ordnung; w soll auf den Teilstrecken Θ verschwinden und soll *in den Nr. 2, I genannten Punkten ξ' mit den n ersten Ableitungen gleich Null sein;* im übrigen ist w beliebig, aber nicht allenthalben zwischen a und b gleich Null. Dann hat das Integral Nr. 1, (11.) das Vorzeichen von a_{nn}.

Die in Abh. Bd. 125, Nr. 5 angegebene Verallgemeinerung, wonach in $y+\varepsilon z$ an Stelle von z gesetzt wird $z+\varepsilon Z$, wo z die frühere Funktion (1.) und Z von der a. a. O. angegebenen Beschaffenheit ist, bleibt auch jetzt bestehen.

L'équation indéterminée $x^l+y^l+z^l=0$ et le critérium de *Kummer*.

Par M. *Mirimanoff*.

L'équation indéterminée

$$(1.)\qquad x^l+y^l+z^l=0$$

est-elle, comme l'a affirmé *Fermat*, impossible en nombres entiers pour tous les exposants l supérieurs à 2?*) Nous l'ignorons encore, malgré les belles recherches d'*Euler*, de *Legendre*, de *Kummer*.

Aucune des démonstrations proposées jusqu'ici ne s'applique, en effet, à tous les l.

Cet insuccès tient-il à l'insuffisance des méthodes employées? Cela semble probable, bien qu'il soit assez difficile de juger de la portée réelle d'une méthode. Je citerai l'exemple de la méthode classique de *Neumann*, pour résoudre le problème de *Dirichlet*, que M. *Poincaré* réussit à étendre au cas général de surfaces quelconques.

Parmi les méthodes destinées à établir l'impossibilité de l'équation (1.) les plus belles sont certainement celles de *Kummer*.

La première de ces méthodes que *Kummer* a exposée dans le t. 40 de ce journal et qui s'applique à tous les l non exceptionnels, c'est-à-dire à tous les l qui ne divisent aucun des $\frac{l-3}{2}$ premiers nombres de *Bernoulli*, est très bien connue.**)

---

*) On sait que l'exposant l peut être supposé premier.

**) *Hilbert*, Jahresbericht der deutschen Math. Vereinig. t. IV, 1894—1895, p. 517. *H. Smith*, Report on the theory of numbers.

Mais *Kummer* s'est occupé aussi des exposants l qui divisent l'un des $\frac{l-3}{2}$ premiers nombres de *Bernoulli.**)

Deux cas sont à distinguer:

1) les nombres x, y, z sont premiers à l,

2) l'un des nombres x, y, z est divisible par l.

Il y a une différence essentielle entre ces deux cas.

Dans le premier, l'impossibilité de l'équation (1.), au moins pour les l qu'on a considérés jusqu'à présent, a pu être établie par des méthodes directes, tandis que le second semble exiger l'emploi d'un procédé particulier dont s'est déjà servi *Fermat* et qui est désigné sous le nom de „descente".

Je ne m'occuperai ici que du premier cas.

La belle méthode que *Kummer* a fait connaître dans son mémoire de 1857 n'a peut-être pas été assez remarquée ni assez appréciée.

Il serait inutile d'en reproduire les principes. Mais je voudrais rappeler le résultat principal obtenu par *Kummer.* J'essaierai de le réduire à sa plus simple expression. Pour cela il me faudra étudier une classe de polynômes qui ont déjà été envisagés par *Euler* et qui jouent un rôle important dans la théorie de l'équation (1.).

Une méthode ingénieuse que l'on doit à *Sophie Germain* et à *Legendre* et qui a été reprise récemment par M. *Ed. Maillet***) permet d'établir l'impossibilité de l'équation (1.) en nombres entiers premiers à l, dans des cas très étendus et entre autres pour tous les $l<223$. Nous y aurons recours dans ce travail.

I. *Critérium de Kummer.*

1. Considérons la fonction

$$f(v)=\log(x+e^v y).$$

Les dérivées de $f(v)$ par rapport à v sont, pour $v=0$, des fonctions rationnelles des paramètres x et y. Posons

$$\frac{d^i \log(x+e^v y)}{dv^i}=\frac{P_i(x,y)}{Q_i(x,y)},$$

$P_i(x,y)$ et $Q_i(x,y)$ étant deux polynômes en x et y.

*) Abh. der Akad. der Wiss. zu Berlin. 1857.

**) Mém. de l'assoc. franç. pour l'avanc. des sciences. 1897, p. 156—168. *Wendt*, „Arithm. Studien", ce journal, t. 113.

Les polynômes $P_i(x,y)$ et $Q_i(x,y)$ sont homogènes en x et y. Il est clair du reste que

$$Q_i(x,y)=(x+y)^i.$$

Supposons maintenant que l'équation (1.) admette une solution

$$x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma,$$

α, β et γ étant trois nombres entiers positifs ou négatifs premiers entre eux deux à deux et à l.

Kummer a montré (Abh. 1857) que les nombres α,β vérifient les congruences

$$N_i P_i(x,y)\equiv 0 \qquad (l), \qquad\qquad (i=3,5,\dots l-2)$$

N_i étant un nombre entier qui n'est divisible par l que si le nombre de *Bernoulli* $B_{\frac{l-i}{2}}$ est divisible par l.

Or l'équation (1.) étant symétrique par rapport à x, y, z, les congruences de *Kummer* sont vérifiées par chacun des systèmes β,α; α,γ etc.

Nous arrivons ainsi au critérium suivant que nous appellerons critérium de *Kummer*:

Si l'équation (1.) admet une solution $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, α,β,γ étant trois nombres entiers premiers à l, chacun des six couples α,β; β,α; ... formés avec deux nombres quelconques du système α,β,γ vérifie les $\frac{l-3}{2}$ congruences

$$(2.)\qquad B_{\frac{l-i}{2}} P_i(x,y)\equiv 0 \qquad (l). \qquad\qquad (i=3,5,\dots l-2)$$

On peut donner une autre forme à ce résultat. Les polynômes

$$P_i(x,y) \text{ et } Q_i(x,y)$$

étant homogènes en x et y, on a

$$P_i(x,y)=x^i P_i(1,t)$$

en posant $t=\frac{y}{x}$.

Appelons τ le rapport de deux nombres d'un couple, c'est-à-dire l'un des 6 nombres $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha},\frac{\alpha}{\gamma},\dots$ (mod l). Les nombres α,β,γ étant premiers à l, le rapport τ vérifie les congruences

$$(3.)\qquad B_{\frac{l-i}{2}} P_i(1,t)\equiv 0 \qquad (l). \qquad\qquad (i=3,5,\dots l-2)$$

A chaque système α, β, γ correspond un groupe de 6 racines des congruences (3).

Les 6 racines d'un même groupe s'expriment en fonction linéaire de l'une d'entre elles.

En effet, α, β, γ sont liés par la relation

$$\alpha+\beta+\gamma\equiv 0 \qquad (l).$$

Par conséquent $$\frac{\gamma}{\alpha}\equiv -1-\frac{\beta}{\alpha}.$$

D'autre part $$\frac{\beta}{\alpha}\equiv 1:\frac{\alpha}{\beta}.$$

Si donc τ est l'une des racines du groupe, ces racines s'expriment ainsi:

$$\tau;\ \frac{1}{\tau};\ -1-\tau;\ -\frac{1}{1+\tau};\ -1-\frac{1}{\tau};\ -\frac{\tau}{1+\tau}.$$

Ces racines ne sont pas nécessairement distinctes (mod l).

Elles se réduisent à deux:

1° lorsque τ est congru à 0 ou à -1,
2° lorsque τ est racine de $t^2+t+1\equiv 0$.

Elles se réduisent à trois, lorsque τ est congru à l'un des trois nombres suivants: $1, -2, -\frac{1}{2}$. Dans tous les autres cas le nombre des racines distinctes d'un même groupe est égal à 6.

Cela posé, reprenons le polynôme $P_i(x,y)=x^i P_i(1,t)$. Supposons i quelconque, pair ou impair.

$$\text{Pour } i=1, \qquad P_i(x,y)=y,$$
$$\text{Pour } i=2, \qquad P_i(x,y)=xy.$$

Par conséquent $\quad P_1(1,t)=P_2(1,t)=t.$
Nous pouvons donc supposer $\quad i>1.$

On voit immédiatement que, pour $i>1$,

$$P_i(y,x)=(-1)^i P_i(x,y). \tag{4.}$$

Par conséquent les polynômes $P_i(x,y)$, pour i pair, et les polynômes $\frac{P_i(x,y)}{x-y}$, pour i impair, sont symétriques par rapport à x et y. De plus $P_i(x,y)$ est divisible par y.

Il en résulte que $P_i(1,t)$ est divisible par t et, pour i impair et supérieur à 1, par $t(1-t)$. Pour simplifier, nous écrirons $P_i(t)$ au lieu de $P_i(1,t)$.

Posons

$$P_i(t) = a_{i,1}t - a_{i,2}t^2 + \cdots + (-1)^i a_{i,i-1}t^{i-1}.$$

En vertu de (4.),

$$a_{i,\varkappa} = a_{i,i-\varkappa}.$$

Voici comment s'expriment les coefficients $a_{i,\varkappa}$:

$$a_{i,1}=1;\quad a_{i,2}=2^{i-1}-1;\quad a_{i,3}=3^{i-1}-i\cdot 2^{i-1}+\binom{i}{2},$$

et, en général,

$$(5.)\quad a_{i,\varkappa}=\varkappa^{i-1}-\binom{i}{1}(\varkappa-1)^{i-1}+\binom{i}{2}(\varkappa-2)^{i-1}-\cdots+(-1)^{\varkappa-1}\binom{i}{\varkappa-1},$$

$\binom{i}{1}$, $\binom{i}{2}$,... étant les coefficients du binôme.*)

Pour le démontrer, il suffit de développer suivant les puissances croissantes de v la fonction

$$f(v) = \log(x+e^v y)$$

ou bien sa dérivée $\frac{df}{dv} = \frac{e^v t}{1+e^v t} = 1 - \frac{1}{1+e^v t}$.

Si l'on pose:

$$\frac{e^v t}{1+e^v t} = \alpha_0 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_i v^i + \cdots,$$

il vient

$$\frac{P_i(t)}{(1+t)^i} = 1\cdot 2\ldots(i-1)\alpha_{i-1}.$$

D'autre part *Euler* a montré**) que les coefficients A_i de la série

$$\frac{p-1}{p-e^v} = 1 + A_1 v + A_2 v^2 + \cdots + A_i v^i + \cdots$$

ont pour expression

$$A_i = \frac{p^{i-1}+(2^i-(i+1))p^{i-2}+\cdots+1}{1\cdot 2\ldots i(p-1)^i}.$$

---

*) On rencontre les nombres $a_{i,\varkappa}$ dans plusieurs questions de Théorie des nombres et d'Analyse. M. *Saalschütz* (Vorlesungen über die *Bernoulli*schen Zahlen, p. 63) et *Scherk* (ce journal, t. 4) les désignent par $\overset{i-1}{A_\varkappa}$, *Worpitzky* (ce journal, t. 94, p. 208) par $\overset{i-1}{\alpha_\varkappa}$.

**) Institut. calculi differ., t. 2. *Scherk*, ce journal, t. 4.

On en déduit immédiatement la formule (5.), en posant $p=-\frac{1}{t}$.
Ce résultat peut du reste être établi directement.
Voici les 9 premiers polynômes $P_i(t)$*):

$$(6.)\left\{\begin{aligned} &P_1(t)=P_2(t)=t; \qquad P_3(t)=t-t^2;\\ &P_4(t)=t-4t^2+t^3; \qquad P_5(t)=t-11t^2+11t^3-t^4;\\ &P_6(t)=t-26t^2+66t^3-26t^4+t^5;\\ &P_7(t)=t-57t^2+302t^3-302t^4+57t^5-t^6;\\ &P_8(t)=t-120t^2+1191t^3-2416t^4+1191t^5-120t^6+t^7;\\ &P_9(t)=t-247t^2+4293t^3-15619t^4+15619t^5-4293t^6+247t^7-t^8.\text{**)}\end{aligned}\right.$$

2. Revenons au critérium de *Kummer.* Posons $\frac{l-1}{2}=\nu$. En se bornant aux 9 polynômes calculés, on a les congruences suivantes:

$$B_{\nu-\varkappa}P_{2\varkappa+1}(t)\equiv 0 \qquad (l). \qquad {\scriptstyle(\varkappa=1,2,3,4)}$$

Supposons que l'un au moins des 4 nombres de *Bernoulli*

$$B_{\nu-\varkappa} \qquad {\scriptstyle(\varkappa=1,2,3,4)}$$

ne soit pas divisible par l, et soit α,β,γ une solution de l'équation (1.). L'une au moins des congruences

$$(7.) \qquad P_{2\varkappa+1}(t)\equiv 0 \qquad (l) \qquad {\scriptstyle(\varkappa=1,2,3,4)}$$

admettra le groupe des racines τ correspondant au système α,β,γ.

Deux cas sont à distinguer:

1º les 6 racines τ sont distinctes; le groupe des τ sera dit complet;

2º le nombre des racines distinctes du groupe est inférieur à 6; le groupe sera dit incomplet.

Je dis qu'aucune des 4 congruences (7.) ne saurait admettre les 6 racines d'un groupe complet.

---

*) C'est *Euler* qui en a calculé les 8 premiers (l. c.).

**) Soit $\nabla f(t)$ l'opération définie par l'égalité $\nabla f(t)=\frac{d}{dt}(tf(t))$ (*Saalschütz,* Vorlesungen über die *Bernoulli*schen Zahlen, p. 55) et posons $f(t)=\frac{\log(1+t)}{t}$, d'où $\nabla f(t)=\frac{1}{1+t}$. On démontre sans peine que $\frac{P_i(t)}{Q_i(t)}=t\nabla^i f(t)$ (*Saalschütz,* l.c. p. 60).

En effet, ces racines étant distinctes, le degré de $P_{2x+1}(t)$ doit être au moins égal à 6.

Mais les polynômes $P_i(t)$ sont tous divisibles par $t(1-t)$ pour i impair, et comme les racines $t=0$, $t=1$ font partie de groupes incomplets, on peut faire abstraction du facteur $t(1-t)$, ce qui réduit les degrés des polynômes de 2 unités. Nous n'avons par conséquent à nous occuper que du polynôme $P_9(t)$.

Or

$$\frac{P_9(t)}{t(1-t)} = 1-246t+4047t^2-11572t^3+4047t^4-246t^5+t^6.$$

D'autre part, tout polynôme du 6e degré qui admet les 6 racines d'un groupe complet et dont le premier terme a pour coefficient l'unité est de la forme

$$1+3t+at^2+(2a-5)t^3+at^4+3t^5+t^6,$$

a étant un nombre entier. En effet, il doit satisfaire aux conditions suivantes:

les termes équidistants des extrêmes ont les mêmes coefficients;

le polynôme ne varie pas lorsqu'on remplace t par $-1-t$.

Si donc la congruence $P_9(t)\equiv 0$ admettait les 6 racines d'un groupe complet, on aurait

$$-246\equiv 3 \qquad (l),$$

d'où $l=3$ ou 83.

Mais l'indice i doit être inférieur à l, il en résulte $l=83$.

D'autre part, on devrait avoir

$$-11572\equiv 2.4047-5 \qquad (l),$$

mais cette congruence n'est pas vérifiée pour $l=83$. Par conséquent aucune des congruences (7.) ne saurait admettre de groupes complets. C. Q. F. D.

Considérons maintenant les groupes incomplets. Il y en a trois:

1° le groupe $0, -1$;

mais on peut en faire abstraction, puisque les nombres α, β, γ sont supposés premiers à l;

2° le groupe des racines de $t^2+t+1\equiv 0$, qui ne se présente que dans le cas où $l-1\equiv 0$ (3);

3° le groupe $1, -2, -\frac{1}{2}$.

Considérons d'abord le groupe incomplet 2°.

On n'a pas à s'occuper du polynôme $P_3(t)$.

Or $\frac{P_5(t)}{t(1-t)} = 1 - 10t + t^2$.

Pour que $P_5(t) \equiv 0$ admette le groupe 2°, il faut que $-10 \equiv 1 (l)$; d'où $l = 11$, mais l'exposant 11 n'est pas congru à 1 (mod 3).

Prenons maintenant le polynôme $P_7(t)$.

On a

$$\frac{P_7(t)}{t(1-t)} = 1 - 56t + 246t^2 - 56t^3 + t^4.$$

En divisant par $1 + t + t^2$, le reste est $-301(1+t)$. Or $301 = 7 \cdot 43$. D'où $l = 7$ ou 43.

Mais l'indice i devant être inférieur à l, il en résulte $l = 43$.

On sait d'autre part que pour $l = 43$ le nombre de *Bernoulli* $B_{\nu-1} = B_{20}$ n'est pas divisible par 43. Le cas de $l = 43$ peut donc être laissé de côté.

Considérons enfin le dernier polynôme $P_9(t)$.

Le reste de la division de $\frac{P_9(t)}{t(1-t)}$ par $1 + t + t^2$ étant égal à

$$-15371 = -19 \cdot 809,$$

pour que ce reste soit nul (mod l), il faut que $l = 19$ ou 809.

Or $809 \not\equiv 1$ (3), et quant à l'exposant $l = 19$, nous savons que 19 est un nombre non exceptionnel.*)

Il nous reste maintenant à considérer le groupe incomplet 3°, c'est-à-dire le groupe $1, -2, -\frac{1}{2}$. Nous savons que les congruences $P_{2\varkappa+1}(t) \equiv 0$ admettent la racine $t \equiv 1$, voyons dans quels cas elles sont vérifiées pour $t \equiv -2$ (nous supposons $l > 3$).

Or, pour $t = -2$,

$$\frac{P_5(t)}{t(1-t)} = 25, \text{ d'où } l = 5, \text{ valeur inadmissible;}$$

$$\frac{P_7(t)}{t(1-t)} = 1561 = 7 \cdot 223;$$

$$\frac{P_9(t)}{t(1-t)} = 181945 = 5 \cdot 36389.$$

---

*) Du reste l'équation (1.) est impossible en nombres entiers premiers à l, dans le cas où $l = 809$, puisque $1619 = 2 \cdot 809 + 1$ est un nombre premier. (Critérium de *Legendre.*)

Théorème I. L'équation indéterminée

$$x^l+y^l+z^l=0$$

est impossible en nombres entiers premiers à l, si l'un au moins des nombres de *Bernoulli* $B_{\nu-1}, B_{\nu-2}, B_{\nu-3}, B_{\nu-4}$ n'est pas divisible par l.

Voici un autre énoncé du théorème I:

L'équation $x^l+y^l+z^l=0$ est impossible en nombres entiers premiers à l, si la suite des $\nu-1$ premiers nombres de *Bernoulli* $B_1, B_2, \ldots B_{\nu-1}$ contient au plus 3 nombres divisibles par l.

Car dans ce cas l'un au moins des nombres de *Bernoulli* $B_{\nu-1}, \ldots B_{\nu-4}$ n'est pas divisible par l.

On pourrait de même examiner les congruences

$$P_{11}(t)\equiv 0,\ P_{13}(t)\equiv 0 \text{ etc.}$$

On obtiendrait ainsi des conditions de plus en plus larges, mais ce n'est certainement pas par ce moyen qu'on réussirait à démontrer l'impossibilité de l'équation (1.) pour tous les l.

Le théorème I comprend, comme cas particuliers, ceux de *Kummer* (Abh. 1857) et de *Cauchy.**)

3. Si un nombre de *Bernoulli* B_i est divisible par l, la somme $\sum_{h=1}^{\nu} h^{2i-1}$ est divisible par l, en vertu de la relation

$$\sum_{h=1}^{\nu} h^{2i-1} \equiv (-1)^i \frac{B_i}{2i}\,\frac{2^{2i}-1}{2^{2i-1}} \qquad (l^2).$$

Il n'est donc pas nécessaire, pour pouvoir appliquer le théorème I, de calculer les nombres de *Bernoulli* $B_{\nu-1}, \ldots B_{\nu-4}$.

Soit p. ex. $l=227$; d'où $\nu=113$.

On s'assure facilement que la somme $\sum_{h=1}^{113} h^{223}$, qu'on peut du reste remplacer par la suivante $\sum_{h=1}^{113} \frac{1}{h^3}$, est congrue à 41 (mod 227).

Nous en concluons que le nombre de *Bernoulli* $B_{\nu-1}=B_{112}$ n'est pas divisible par $l=227$.

Les calculs se simplifient lorsque $l-1$ est divisible par 4 ou par 3.

*) Comptes rendus. 1847. 2e sem. p. 181.

En tenant compte des résultats obtenus par *Legendre* et M. *Ed. Maillet*,*) nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème II. L'équation $x^l+y^l+z^l=0$ est impossible en nombres entiers premiers à l, pour tous les l inférieurs à 257.

Dans un mémoire paru en 1874 (Berichte d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin) *Kummer* a donné les valeurs de l'indice $\imath$ pour lesquelles les nombres de *Bernoulli* B_i sont divisibles par l, le nombre l étant $\leqq 163$.

II. Étude des polynômes $P_i(t)$.

4. Le système de *Kummer* contient $\frac{l-3}{2}$ congruences, mais nous ne nous sommes servi jusqu'à présent que des 4 premières. Pour pouvoir tirer parti du système entier, nous allons le transformer, en remplaçant les polynômes $P_i(t)$ par des polynômes équivalents.

Reprenons l'étude des polynômes $P_i(t)$. Supposons l'indice pair ou impair, mais supérieur à 1.

Nous avons vu que les coefficients $a_{i,\varkappa}$ de $P_i(t)$ ont pour expression

$$a_{i,\varkappa}=\varkappa^{i-1}-\binom{i}{1}(\varkappa-1)^{i-1}+\cdots+(-1)^{\varkappa-1}\binom{i}{\varkappa-1}.$$

Soient m, n deux nombres entiers positifs inégaux. Considérons le polynôme

$$x^n-\binom{m}{1}(x-1)^n+\binom{m}{2}(x-2)^n-\cdots+(-1)^m(x-m)^n.$$

Ce polynôme est nul quelque soit x, pourvu que n soit inférieur à m.**)

Faisons $x=\varkappa$, $\varkappa$ étant un nombre entier et positif $\leqq m+1$ et désignons par $a^{(n)}_{m,\varkappa}$ l'ensemble des $\varkappa$ premiers termes de notre polynôme.

Pour $m=i$ et $n=i-1$, on a

$$a^{(n)}_{m,\varkappa}=a_{i,\varkappa}.$$

Multiplions maintenant le polynôme $P_i(t)$ par $1+t$. Le coefficient de $t^\varkappa$ devient

$$(-1)^{\varkappa-1}a^{(i-1)}_{i+1,\varkappa}.$$

*) Assoc. franç. 1897.

**) *Arndt* (ce journal, t. 31 p. 239).

Cette relation est encore vraie pour tout polynôme en t, à coefficients entiers, qui ne renferme pas de termes de la forme $ct^{\varkappa l}$.

On voit que les polynômes $\varphi_i(t)$ forment un cycle.

L'opération A_t a déjà été considérée par *Cauchy.**)

Nous rappellerons la propriété suivante:

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de t, on a

$$(18.)\quad \begin{cases} A_t^\varkappa(f_1 f_2) = A_t^\varkappa f_1\cdot f_2 + \binom{\varkappa}{1} A_t^{\varkappa-1} f_1\cdot A_t f_2 + \binom{\varkappa}{2} A_t^{\varkappa-2} f_1\cdot A_t^2 f_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + \binom{\varkappa}{1} A_t f_1 A_t^{\varkappa-1} f_2 + f_1\cdot A_t^\varkappa f_2. \end{cases}$$

On en tire

$$(19.)\quad \begin{cases} A_t^\varkappa(\varphi_m(t)\,\varphi_n(t)) \equiv \varphi_{m+\varkappa}\varphi_n + \binom{\varkappa}{1}\varphi_{m+\varkappa-1}\,\varphi_{n+1} + \cdots \\ \qquad\qquad + \binom{\varkappa}{1}\varphi_{m+1}\varphi_{n+\varkappa-1} + \varphi_m\,\varphi_{n+\varkappa}. \end{cases}$$

En appliquant l'opération A_t à un polynôme en t, à coefficients entiers, les termes de la forme $ct^{\varkappa l}$ disparaissent, mod l. Ces termes jouent le rôle de constantes.

Posons

$$A_t^{-1} f(t) = \int_0^t \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Les polynômes $\varphi_i(t)$ ne contenant pas de termes de la forme $ct^{\varkappa l}$, on aura

$$(20.)\qquad \varphi_i(t) \equiv A_t^{-1}\varphi_{i+1}(t).$$

6. Posons maintenant

$$(21.)\qquad \psi_i(t) \equiv \varphi_i(-1-t).$$

Il résulte de (12.) que, pour $i>1$, $\psi_i(t)$ est divisible par t^{l-i}. Seul le polynôme $\psi_1(t)$ n'est par divisible par t et l'on a

$$\psi_1(t) \equiv 1 - t^{l-1}.$$

Deux polynômes consécutifs $\psi_i(t)$ et $\psi_{i+1}(t)$ sont liés par la relation

*) Comptes rendus. 1847. 2e sem., p. 133. L'opération $\nabla f(t)$ (*Saalschütz,* l. c. p. 55) est liée à $A_t f(t)$ par la relation $\nabla f = A_t f + f$; d'où la relation symbolique $\nabla^i f = (A_t+1)^i f$.

$$(27.)\quad \begin{cases} \psi_{l-2}(t) \equiv \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) \\ \qquad + \frac{t^4}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right) - \cdots + \frac{t^{l-1}}{l-1}\left(\frac{1}{l-2}+\frac{1}{l-3}+\cdots+1\right). \end{cases}$$

En général, si l'on pose

$$\psi_{l-i}(t) \equiv b_i \frac{t^i}{i} - b_{i+1}\frac{t^{i+1}}{i+1} + \cdots + (-1)^i b_{l-1}\frac{t^{l-1}}{l-1},$$

un coefficient quelconque $b_\varkappa$ est égal à la somme des produits des $(\varkappa-1)$ nombres $\frac{1}{\varkappa-1}, \frac{1}{\varkappa-2}, \dots \frac{1}{2}, 1$, $i-1$ à $i-1$. En particulier $b_i = \frac{1}{1\cdot 2\dots(i-1)}$.

Soit, p. ex., $i=l-2$; le coefficient b_i est congru à $\frac{(l-1)(l-2)}{1\cdot 2\dots(l-1)}$ et le coefficient b_{i+1} à $\frac{l-1}{1\cdot 2\dots(l-1)}$; d'où

$$\psi_2(t) \equiv \frac{l-1}{1\cdot 2\dots(l-1)}t^{l-2} - \frac{1}{1\cdot 2\dots(l-1)}t^{l-1}.$$

D'autre part

$$\psi_2(t) \equiv \varphi_2(-1-t) \equiv t^{l-2}+t^{l-1}.$$

Par conséquent $1\cdot 2\dots(l-1) \equiv -1$ et l'on retombe ainsi sur le théorème classique de *Wilson.*

Les coefficients des polynômes $\psi_i(t)$ peuvent être obtenus d'une manière différente.

Observons que le polynôme $\varphi_{l-1}(t)$ se confond (mod l) avec les $l-1$ premiers termes de la série

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots,$$

et reprenons la formule (23.) qui permet de remonter aux polynômes

$$\psi_{l-2}(t),\ \psi_{l-3}(t)\dots$$

en partant du polynôme $\varphi_{l-1}(t)$.

Remplaçons $\varphi_{l-1}(t)$ par $\log(1+t)$.

Au lieu des polynômes $\psi_{l-2}(t)$, $\psi_{l-3}(t), \dots \psi_{l-i}(t)$, nous obtiendrons les séries $\frac{1}{2}\log^2(1+t)$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\log^3(1+t), \dots \frac{1}{1\cdot 2\dots i}\log^i(1+t)$.

Il en résulte qu'il suffit, pour former $\psi_{l-i}(t)$, de développer

$$\frac{1}{1\cdot 2\dots i}\varphi_{l-1}^i(t)$$

suivant les puissances croissantes de t et de prendre $l-1$ termes de ce développement.

Soit $i = l-2$. On considérera le développement

$$\frac{1}{1\cdot 2\ldots(l-2)}t^{l-2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{l-2} = t^{l-2}(1+t),$$

d'où $\psi_2(t) = t^{l-2}(1+t)$.

7. **Relations entre les polynômes $\varphi_i(t)$ et $\psi_i(t)$.** Signalons d'abord la relation suivante:

$$\varphi_{l-2}(t) = \psi_{l-2}(t) - t^l\psi_{l-2}\left(\frac{1}{t}\right), \tag{28.}$$

qu'on déduit immédiatement de la formule (27.).

D'autres relations, plus curieuses, peuvent être établies en partant de la propriété que nous avons indiquée dans le paragraphe précédent.

Nous avons vu, en effet, que le polynôme $\frac{1}{1\cdot 2\ldots i}\varphi_{l-1}^i(t)$ est égal (mod l) à $\psi_{l-i}(t)+$ un ensemble de termes tous divisibles par t^l.

D'autre part, dans le polynôme $\varphi_{l-1}^i(t)$ les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux entre eux (mod l). Il en résulte immédiatement que, pour $i=2$,

$$\frac{1}{2}\varphi_{l-1}^2(t) = \psi_{l-2}(t) + t^{2l}\psi_{l-2}\left(\frac{1}{t}\right). \tag{29.}$$

Remplaçons maintenant t par $-1-t$. On aura, en vertu des formules (21.) et (26.),

$$\frac{1}{2}\varphi_{l-1}^2(t) = \varphi_{l-2}(t) + (1+t)^{2l}\varphi_{l-2}\left(-\frac{t}{1+t}\right). \tag{30.}$$

Lorsque i est supérieur à 2, on obtient des expressions beaucoup plus compliquées.

Bornons nous à indiquer la relation suivante:

$$\frac{\varphi_{l-1}^3(t)}{1\cdot 2\cdot 3} = (1+t^l)\psi_{l-3}(t) - t^l\varphi_{l-3}(t) + t^{2l}(1+t^l)\psi_{l-3}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{c}{l}(t^l + t^{2l}), \tag{31.}$$

le nombre c étant égal à la somme des produits des $l-1$ nombres

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots\frac{1}{l-1}$$

deux à deux.

8. Congruences $\varphi_i(t)\equiv 0(l)$.

Considérons maintenant les congruences

$$(32.)\qquad \varphi_i(t)\equiv 0 \quad (l).$$

Nous avons vu que le polynôme $\varphi_i(t)$ est divisible, pour $i>1$, par $t(1+t)^{l-i}$. Il en résulte que la congruence (32.) admet au plus $i-2$ racines différentes de 0 et -1.

Quant au polynôme $\varphi_1(t\equiv)\dfrac{t(1-t^{l-1})}{1+t}$, il s'annule $(\mathrm{mod}\, l)$ pour toutes les valeurs de t, sauf $t=-1$.

Supposons que $\varphi_i(t)\equiv 0$ admette une racine multiple.

Cette racine annule $\varphi_{i+1}(t)\equiv 0$.

La congruence

$$(33.)\qquad \varphi_{l-1}(t)\equiv 0$$

mérite une attention spéciale.

Voici ses propriétés les plus caractéristiques:

1⁰ toutes les racines de (33.) différentes de 0 et -1 sont doubles. En effet toutes les racines de $\varphi_1(t)\equiv 0$ sont simples.

2⁰ Si la congruence (33.) admet une racine τ, elle admet, en vertu de (26.), les 6 racines du groupe engendré par τ.

Considérons d'abord les groupes incomplets. Nous savons que (33.) admet le groupe 0, -1. D'autre part, le polynôme $\varphi_{l-1}(t)$ est divisible par $1+t+t^2$ quelque soit l, et il est divisible par $(1+t+t^2)^2$, lorsque $l-1\equiv 0\,(3)$.*)

Quant au groupe incomplet 3⁰, pour que la congruence (33.) admette les trois racines de ce groupe, il faut et il suffit que

$$(34.)\qquad 2^{l-1}\equiv 1 \quad (l^2).$$

Il est clair d'après cela que la congruence (33.) ne saurait admettre une racine d'un groupe complet, à moins que son degré ne soit supérieur à 16 ou à 18. Mais ces limites sont trop petites.

Nous pouvons écrire, en effet,

$$\varphi_{l-1}(t)\equiv t(1+t)(1+t+t^2)^{\varepsilon}E(t) \qquad (\varepsilon=1,\ \text{si } l-1\not\equiv 0(3) \text{ et } \varepsilon=2,\ \text{si } l-1\equiv 0(3))$$

$E(t)$ étant un polynôme en t.

*) *Cauchy* et *Liouville*: „Rapport sur un mémoire de M. *Lamé* relatif au dernier théorème de *Fermat*". Comptes rendus, 1839.

Supposons que le nombre des racines de $E(t)\equiv 0$ soit égal à son degré. Supposons de plus que $E(1)$ ne soit pas divisible par l. Nous pourrons poser

$$E(t)\equiv e_1(t)e_2(t)\dots e_\varkappa(t),$$

$e_1(t), e_2(t)\dots$ étant des polynômes du 6e degré de la forme

$$e_i(t)\equiv 1+3t+a_it^2+(2a_i-5)t^3+a_it^4+3t^5+t^6.$$

On trouve:

1°. Si $l-1\not\equiv 0$ (3)

$$(35.)\quad \begin{cases} \sum_i a_i\equiv \dfrac{(l+17)(l-5)}{24}, \\ \prod_i (a_i-6)\equiv 1. \end{cases} \qquad (i=1,2,\dots\varkappa)$$

2°. Si $l-1\equiv 0$ (3)

$$(36.)\quad \begin{cases} \sum_i a_i\equiv \dfrac{(l+19)(l-7)}{24}, \\ \prod_i (a_i-6)\equiv \dfrac{l-1}{6}. \end{cases} \qquad (i=1,2,\dots\varkappa)$$

Soit $l=17$; il viendra, en vertu de (35.), puisque $\varkappa=2$ et que $e_1(t)\equiv e_2(t)$,

$$2a_i\equiv 0 \qquad (17).$$

Par conséquent $\prod_i (a_i-6)\equiv 36$.

D'autre part 36 n'est pas congru à 1 (17).

On verrait de même que $\varphi_{l-1}(t)\equiv 0$ n'admet pas de groupe complet pour $l=19$.

Nous en concluons que la congruence (33.) n'admet pas de racines appartenant aux groupes complets pour $l<23$. Du reste cette nouvelle limite est encore trop petite.*)

Revenant au cas général, bornons nous à indiquer les propriétés suivantes:

1°. Si l'indice i est impair, les congruences $\varphi_i(t)\equiv 0$ admettent la racine $t\equiv 1$.

---

*) *Ed. Maillet.* Assoc. franç. 1897.

Mais si l'indice i est pair et inférieur à $l-1$, les congruences $\varphi_i(t)\equiv 0$ n'admettent pas la racine $t\equiv 1$, à moins que le produit

$$B_{\frac{i}{2}}(2^i-1)$$

ne soit divisible par l. Cette condition est nécessaire et suffisante.

2°. Supposons que $l-1\equiv 0\,(3)$.

On a le théorème suivant:

Pour que $\varphi_i(t)$ soit divisible par t^2-t+1, l'indice i étant un nombre pair inférieur à $l-1$, il faut et il suffit que le produit

$$B_{\frac{i}{2}}(3^i-1)$$

soit divisible par l.

D'autre part, si $B_{\frac{i}{2}}\equiv 0\,(l)$, la congruence $\varphi_i(t)\equiv 0$ admet les racines du groupe incomplet 2°.

Si donc $B_{\frac{i}{2}}\equiv 0\,(l)$, la congruence $\varphi_i(t)\equiv 0$ admet les 6 racines de $t^6-1\equiv 0$, pourvu que i soit inférieur à $l-1$.

III. *Critérium transformé.*

Revenons aux congruences de *Kummer* (3.).

Remplaçons les polynômes $P_i(t)$ par les polynômes $\varphi_i(t)$. Il viendra

$$(37.)\qquad B_{\frac{l-i}{2}}\varphi_i(t)\equiv 0 \quad (l). \qquad\qquad (i=3,5,\ldots l-2)$$

A ces $\frac{l-3}{2}$ congruences nous pouvons ajouter la suivante

$$(38.)\qquad \varphi_{l-1}(t)\equiv 0 \quad (l).$$

Nous savons, en effet, que les congruences (37.) admettent les transformés de τ, ou bien, ce qui n'est qu'une autre manière d'exprimer la même propriété, le rapport τ est aussi racine de

$$B_{\frac{l-i}{2}}\varphi_i(-1-t)\equiv 0$$

et de

$$B_{\frac{l-i}{2}}\varphi_i\left(-\frac{t}{t+1}\right)\equiv 0.$$

Il en résulte, en faisant $i=2$, que τ est racine de $\varphi_{l-2}(t)\equiv 0$ et de

$$\varphi_{l-2}\left(-\frac{t}{t+1}\right)\equiv 0.$$

Donc, en vertu de (30.), τ est racine de

$$\varphi_{l-1}(t)\equiv 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit que la congruence (38.) est une conséquence des congruences (37.) de *Kummer*. Nous nous en sommes déjà servi dans la première partie de ce travail (§ 2). La congruence (38.), que j'appellerai congruence fondamentale, permet de démontrer dans des cas étendus l'impossibilité de l'équation (1.) Supposons, p. ex., $l<23$.

On s'assure immédiatement que la condition $2^{l-1}\equiv 1\,(l^2)$ n'est pas remplie.

D'autre part nous avons vu (§ 8) que la congruence (38.) n'admet pas de groupes complets pour $l<23$.

Reste le groupe 2°, c'est-à-dire le groupe des racines de $t^2+t+1\equiv 0$.

Mais ce groupe ne se présente pas dans le cas où $l\not\equiv 1(3.)$. Nous en concluons que l'équation (1.) est impossible en nombres entiers premiers à l pour $l=3, 5, 11, 17$, résultat connu.

Quant aux exposants $l=7, 13, 19$, la congruence (38.) nous apprend que les solutions τ, si elles existent, appartiennent nécessairement au groupe incomplet 2°.

Mais elle ne nous apprend rien de plus.

Pour trancher la question, il faut avoir recours aux congruences (37.) de *Kummer*.

Le nombre total des congruences (y compris la congruence (38.)) est égal à $\frac{l-1}{2}=\nu$, ce qui nous donne ν conditions.

Supposons maintenant que $\varkappa$ nombres de *Bernoulli* soient divisibles par l. Les $\varkappa$ congruences correspondantes deviennent des identités (mod l), et le nombre des congruences utiles se réduit à $\nu-\varkappa$.

Je ferai voir que les conditions perdues se retrouvent sous une autre forme.

On peut, en effet, éliminer les nombres de *Bernoulli* des congruences de *Kummer*.

10. Soit x un nombre entier positif. On sait que la somme

$$S_i(x-1)=1^i+2^i+\cdots+(x-1)^i$$

s'exprime par le polynôme de *Bernoulli*

$$B_i(x)=\frac{x^{i+1}}{i+1}-\frac{1}{2}x^i+\binom{i}{1}\frac{B_1}{2}x^{i-1}\cdots.$$

Si donc on pose

$$\mathfrak{B}_i(x)=B_i(x)+x^i=\frac{x^{i+1}}{i+1}+\frac{1}{2}x^i+\binom{i}{1}\frac{B_1}{2}x^{i-1}-\cdots$$

il viendra

$$S_i(x)=\mathfrak{B}_i(x). \tag{39.}$$

D'où

$$\sum_x(-1)^{x-1}x^{l-2-i}S_i(x)t^x=\sum_x(-1)^{x-1}x^{l-2-i}\mathfrak{B}_i(x)t^x, \qquad (x=1,2,\ldots l-1)$$

ou bien, l'indice i étant supposé $<l-1$,

$$(40.)\quad\left\{\begin{aligned} & t-2^{l-2-i}(1^i+2^i)t^2+3^{l-2-i}(1^i+2^i+3^i)t^3-\cdots \\ &\qquad -(l-1)^{l-2-i}(1^i+2^i+\cdots+(l-1)^i)t^{l-1} \\ &\qquad =\frac{1}{i+1}\varphi_1(t)-\frac{1}{2}\varphi_{l-1}(t)+\binom{i}{1}\frac{B_1}{2}\varphi_{l-2}(t) \\ &\qquad\qquad -\binom{i}{3}\frac{B_2}{4}\varphi_{l-4}(t)+\cdots.\end{aligned}\right.$$

Mais, en vertu des congruences (37.) et (38.), le second membre est divisible par l, pour $t=\tau$.

D'autre part le premier membre est congru à

$$A_t^{l-2-i}\frac{\varphi_{i+1}(t)}{1+t},$$

puisque

$$t-(1^i+2^i)t^2+(1^i+2^i+3^i)t^3-\cdots-(1^i+2^i+\cdots+(l-1)^i)t^{l-1}\equiv\frac{\varphi_{i+1}(t)}{1+t}.$$

Donc

$$A_t^{l-2-i}\frac{\varphi_{i+1}(t)}{1+t}\equiv 0 \quad (l) \tag{41.}$$

pour $t=\tau$.

Le premier membre de (41.) s'exprime très simplement au moyen des polynômes $\varphi_i(t)$.

En effet, puisque $(1+t)^l$ joue le rôle d'une constante, on aura en multipliant par $(1+t)^l$,

$$A_t^{l-2-i}\varphi_{i+1}(t)(1+t)^{l-1}\equiv 0.$$

Le polynôme $\varphi_{l-3}(t)$ sera divisible par $e^4(t)$, puisque τ annule

$$\varphi_{l-2}(t), \varphi_{l-1}(t) \text{ et } \varphi_1(t).$$

D'autre part $\varphi_{l-3}(t)$ est divisible par $t(1+t)^3$. Si donc $l < 29$, le rapport τ ne saurait appartenir à un groupe complet.

Cette nouvelle limite est plus élevée que celle que nous avons obtenue au paragraphe précédent.

Il importe de remarquer que notre raisonnement n'implique aucune hypothèse sur les nombres $B_{\nu-1}, B_{\nu-2} \ldots$.

En faisant $i = 5, 7, \ldots$, on obtiendrait des conditions de plus en plus larges. Il est fort peu probable du reste que ce procédé puisse donner un résultat essentiellement nouveau.

En résumé, aucun des résultats que nous avons déduits du critérium de *Kummer*, ne s'applique à tous les l.

Je crois cependant que mon travail pourrait être de quelque utilité aux géomètres, en appelant leur attention sur une méthode qui n'a pas été assez remarquée.

Zwei Beiträge zur Lehre vom Maximum und Minimum der Figuren in der Ebene.

Von Herrn *Eugen Meyer* in Charlottenburg.

Die beiden Teile, aus denen die folgende Arbeit besteht, beziehen sich auf einige der von *Steiner* in seinen zwei großen Abhandlungen (Werke II, S. 177—308)*) enthaltenen Probleme, sind aber im übrigen völlig unabhängig von einander.

Im ersten Teil werden einige Sätze in elementarer Weise bewiesen, von denen der zweite mit der hier gegebenen Begründung, wie ich nachträglich sehe, sich schon bei *L'Huilier*, *de relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum*, Varsaviae 1782, § 45 findet, anders von *Steiner* S. 249, V abgeleitet ist. Der dritte ist ein besonderer Fall eines von *Steiner* S. 241, § 66 ohne Beweis angegebenen sehr allgemeinen Satzes. Bei dem hier für diesen Satz gegebenen Beweise zeigte sich die Wahrheit der Beobachtung, die *Steiner* bei seinen Untersuchungen in diesem Gebiete gemacht hat: „oft stößt man von der einen Seite her auf unüberwindliche Hindernisse, während von einer andern Seite durch die trivialsten Mittel das Ziel erreicht wird.“ (S. 181; vgl. auch S. 200, Bem. II.) Satz V ist wohl jedenfalls hier zum ersten Male ausgesprochen; für Satz III und den zweiten Teil von IV war meines Wissens bisher kein elementarer Beweis bekannt.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit einer S. 226 gestellten Aufgabe, die sich folgendermaßen formulieren läßt:

---

*) Die im folgenden vorkommenden Seitenzitate beziehen sich, wo nichts anderes angegeben, sämtlich auf *Steiners* Ges. Werke.

„Es seien die geraden Strecken $a, b, c, \ldots$ in beliebiger Anzahl und Länge und außerdem noch eine Linie von willkürlicher Länge p gegeben, so fragt sich, wie viele Kreise es gibt von der Beschaffenheit, daß die Bogen über den in einem solchen Kreise als Sehnen eingetragenen Strecken $a, b, c, \ldots$ die Summe p ergeben. Dabei sollen nach Belieben die kleineren oder größeren Bogen, auch solche genommen werden dürfen, die größer sind als der ganze Kreis."

Steiner hat diese Aufgabe für den „beschränkteren Fall", wo nur zwei Strecken a und b gegeben sind und von den über ihnen stehenden Bogen keiner größer als die ganze Kreislinie ist, behandelt (S. 218ff.); hier soll sie für zwei Sehnen ohne jede Beschränkung gelöst werden, und zwar soll, was bei *Steiner* fehlt, ein Mittel angegeben werden, in jedem Falle zu bestimmen, wie viele Kreise möglich sind.

Steiner stellt weiter die Frage nach der charakteristischen Eigenschaft solcher Kreise, bei denen die Summe der über den Sehnen $a, b, c, \ldots$ stehenden Bogen ein Minimum ist, „wofern in Rücksicht jeder Sehne bestimmt ist, ob der kleinere oder größere Bogen genommen werden soll". Diese Frage ist von ihm nur für zwei besondere Fälle (ohne Beweis) beantwortet worden, nämlich 1) dafür, daß die Anzahl der Sehnen gleich zwei, die eine Sehne $b = 0$, der über ihr stehende Bogen also der ganze Kreis ist, und daß über der anderen Sehne der kleinere Bogen genommen wird (S. 221) und 2) für den Fall, daß alle Sehnen gleich, ihre Anzahl ungerade, über n von ihnen der größere Bogen und über den $(n+1)$ übrigen der kleinere genommen wird (S. 226). Im folgenden wird sie allgemein beantwortet.

I.

1. Von allen Dreiecken über derselben Grundlinie und mit gleicher Schenkelsumme hat das gleichschenklige den größten Winkel an der Spitze.

In der Tat; es seien (Fig. 1) A_1BC und ABC zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie BC und gleicher Schenkelsumme. Ferner sei $AB = AC$. Das Dreieck BA_1C kann BAC nicht umschließen, weil sonst gegen die Voraussetzung sein Umfang größer wäre. Liegt dann BA_1 zwischen BA und BC und macht man $BA + AC = BD$, $BA_1 + A_1C = BD_1$, so ist $\sphericalangle BCD$ ein Rechter. Dreht man nun das Dreieck BCD_1 unter Festhalten der Ecke B, bis BD_1 auf BD fällt, so bewegt sich C auf dem um B mit BC beschriebenen Kreise, für den DC Tangente ist. C fällt somit, wie klein auch die Drehung

sitzen; der zweite Teil kann folgendermaßen bewiesen werden. Denkt man sich ein gleichseitiges Dreieck ABC und ein ungleichseitiges $A_1B_1C_1$ von gleichem Umfange und dem ersteren einen Kreis mit dem Mittelpunkte O umbeschrieben, so läßt sich diesem Kreise ein Dreieck $A_2B_2C_2$, das $A_1B_1C_1$ ähnlich ist, einschreiben. Dieses aber hat nach Satz III kleineren Umfang als $A_1B_1C_1$. Man kann daher die Ecken A_2, B_2, C_2 bezw. auf OA_2, OB_2, OC_2 so um ein gleiches Stück nach außen bis bezw. A_3, B_3, C_3 verschieben, daß $A_3B_3C_3$ mit $A_1B_1C_1$ gleichen Umfang hat. Da beide außerdem ähnlich sind, so sind sie kongruent. Aber $A_3B_3C_3$ hat einen größeren Radius des umbeschriebenen Kreises als ABC.

V. *Von allen spitzwinkligen Dreiecken, die Höhenfußpunktdreiecke von gleichem Umfange haben, besitzt das gleichseitige die kleinste Fläche.*

Ist nämlich (Fig. 3) $A_1B_1C_1$ das Fußpunktdreieck, H der Höhenschnittpunkt, so ist wegen der Gleichheit der mit δ bezeichneten Winkel $\sphericalangle AB_1C_1=\beta$, somit $\triangle AB_1C_1 \sim ABC$, und da der dem Dreieck AB_1C_1 umbeschriebene Kreis den Radius

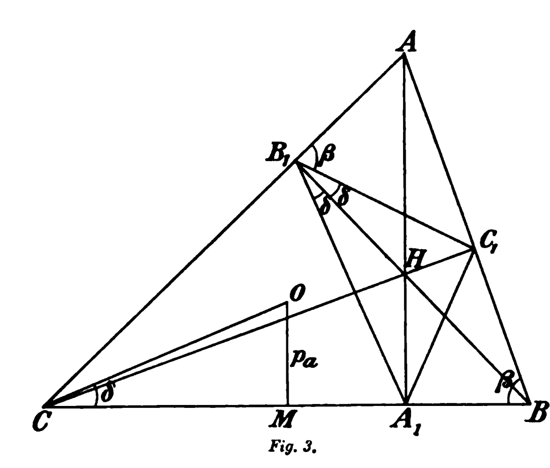


Fig. 3.

$$\frac{1}{2}AH = OM = p_a$$

hat, wo O der Mittelpunkt des Umkreises für ABC, M die Mitte von BC ist, so folgt, wenn a_1, b_1, c_1, s_1, r_1 für Dreieck $A_1B_1C_1$ dieselben Bedeutungen haben wie a, b, c, s, r für ABC und s bezw. s_1 den halben Umfang bedeutet,

$$\frac{a_1}{p_a}=\frac{a}{r},\quad \frac{b_1}{p_b}=\frac{b}{r},\quad \frac{c_1}{p_c}=\frac{c}{r},$$

demnach $s_1 \cdot r = \frac{ap_a+bp_b+cp_c}{2} = F$, dem Flächeninhalt von ABC, also auch da $r=2r_1$ (*Feuerbachs* Kreis), $2r_1s_1=F$. Diese Gleichung gilt nicht für stumpfwinklige Dreiecke.

Soll nun F bei konstantem s_1 möglichst klein werden, so muß r_1 ein Minimum sein. Dies ist aber nach Satz IV der Fall, wenn das Fußpunktdreieck und somit auch das ursprüngliche gleichseitig ist.

der Sehnen $a = AB$ und $b = CD$ die beiden Tangenten, die sich bezw. in E und F schneiden, so ist stets

$$z = (AE + BE) - (CF + DF).$$

Untersuchen wir, wieviele reelle Wurzeln zwischen 0 und π die Gleichung (3.) besitzt. Setzt man

$$(4.)\qquad y = \operatorname{tg}\frac{u}{2} - \frac{\frac{b}{a}\cdot\sin\frac{u}{2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\frac{u}{2}}} - \frac{u}{2} - \pi + \arcsin\left(\frac{b}{a}\cdot\sin\frac{u}{2}\right),$$

so ergibt sich

$$(5.)\qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}} - \frac{\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\sin^2\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\frac{u}{2}}\right)^3},$$

also, da $b < a$, $\frac{dy}{du} > 0$ für $0 < u < \pi$.

Da für $y = -\pi$ $u = 0$ und $y = \infty$ für $u = \pi$ ist, die Funktion y ferner für $0 < u < \pi$ stetig und endlich ist, so gibt es zwischen 0 und π offenbar einen und nur einen Wert von u, für welchen $y = 0$ ist. Es kann aber für diesen Wert s_1 nur ein Minimum, nicht ein Maximum sein, da für $u = 0$ $s_1 = \infty$ ist und von $u = \pi$ an $s_1 = \alpha_1 + \beta_1$ beständig wächst, wie aus seiner geometrischen Bedeutung hervorgeht. Auch ist, wie man sieht, dieses Minimum das einzige für $0 < u < 2\pi$. Wir haben demnach den Satz:

„Sind einem veränderlichen Kreise die Sehnen a und b ($a > b$) einbeschrieben und wird über b stets der größere Bogen genommen, so ist die Summe der beiden Bogen dann und nur dann ein Minimum, wenn sie gleich ist der Differenz der Summe der in den Endpunkten der Sehne a gezogenen Tangenten und der Summe der in den Endpunkten der Sehne b gezogenen Tangenten."

Für den von *Steiner* angegebenen besonderen Fall $b = 0$ kann man auch sagen:

„Das Minimum ist vorhanden, wenn der Schwerpunkt der Bogensumme s_1 auf a liegt."

Denn die Entfernung x_0 des Schwerpunkts vom Kreiszentrum ist $x_0 = \frac{r\cdot a}{s_1}$, also für unser Minimum, da $s_1 = 2r\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, $a = 2r\cdot\sin\frac{u}{2}$ ist, $x_0 = r\cdot\cos\frac{u}{2}$.

2. Nehmen wir nunmehr an, der zu b gehörige Bogen sei *kleiner* als der Halbkreis. Die Summe $s_0 = \alpha + \beta$ hat ihren kleinsten Wert, nämlich $a + b$, für $u = 0$ $(r = \infty)$, wächst mit zunehmendem u bis für $u = \pi$ $\alpha = \frac{\pi a}{2}$ ist und den größten möglichen Wert erhält. Wächst u über π hinaus, so hat man es mit der Summe $\alpha_1 + \beta$ zu tun, und es wird jetzt, da r wieder zunimmt, β abnehmen, aber α_1 zunehmen. Die Summe $\alpha_1 + \beta$ aber bleibt im Wachsen. Denn denkt man sich die Sehnen a und b so in den Kreis eingetragen, daß sie einen Endpunkt gemeinsam haben, und b in dem Segment $(a\alpha)$ liegt, so wird $\sphericalangle(ab)$ mit wachsendem r kleiner, wie die Anschauung für zwei sich in den Endpunkten von a schneidende Kreise zeigt, also auch der zu $\sphericalangle(ab)$ gehörige kleinere Bogen; $\alpha_1 + \beta$ wird also größer.

Nimmt man nun wieder an, daß einer der beiden Bogen oder jeder von beiden größer als der Kreisumfang ist, jedoch so, daß der etwaige Überschuß des Bogens von b über ein Vielfaches des ganzen Kreises kleiner als der Halbkreis ist, so wird aus (1.)

$$\bar{s}_k = \frac{a}{\sin\frac{u}{2}} \frac{u}{2} + \frac{k\pi a}{\sin\frac{u}{2}} + \frac{a}{\sin\frac{u}{2}} \left(\frac{b \cdot \sin\frac{u}{2}}{a}\right).^{*)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Gleichung (3.) wird

$$\frac{u}{2} + k \cdot \pi + \arcsin\left(\frac{b}{a} \sin\frac{u}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

und aus (4.) entsteht

$$y_k = \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \frac{\frac{b}{a} \cdot \sin\frac{u}{2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\frac{u}{2}}} - \frac{u}{2} - k\pi - \arcsin\left(\frac{b}{a} \sin\frac{u}{2}\right).$$

y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ hat wieder nur eine Nullstelle für $0 < u < \pi$, und $\bar{s}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ hat nur ein Minimum zwischen 0 und π und wächst dann stetig.

Auch hier gilt, wie man sieht, der in Nr. 1 ausgesprochene Satz, nur ist nicht die Differenz, sondern die Summe der Tangentenpaare zu nehmen.

An Stelle von z tritt $\bar{z} = \frac{a}{\sin\frac{u}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \operatorname{tg}\frac{v}{2}\right)$. $\bar{z}$ wächst, wenn u von 0 bis π zunimmt, stetig von $a + b$ bis ins Unendliche (vgl. Fig. 5).

*) Der Index k bei $\bar{s}$ und s gibt an, wieviel volle Kreisumfänge in der Bogensumme enthalten sind.

Ein Satz über Thetafunktionen.

Von Herrn *Heinrich Jung* in Marburg a. d. L.

Es gibt 4^n Thetafunktionen von n Veränderlichen erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik. Von diesen soll folgender Satz bewiesen werden: *Es lassen sich auf mannigfache Art 4^ν quadratische homogene Funktionen von ihnen bilden, so daß zwischen diesen 4^ν Funktionen dieselben linearen Gleichungen bestehen wie zwischen den Quadraten der 4^ν Thetafunktionen von ν Veränderlichen mit zweiteiliger Charakteristik.*

§ 1.

Wir bezeichnen die Charakteristik der Thetafunktion von n Veränderlichen

$$(1.)\quad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(u_1, \ldots u_n) = \sum_{(p)} e^{\pi i \Sigma \tau_{ik}(p_i + \frac{1}{2}h_i)(p_k + \frac{1}{2}h_k) + 2\pi i \Sigma (p_i + \frac{1}{2}h_i)(u_i + \frac{1}{2}g_i)}$$

mit

$$(2.)\qquad \begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots g_n \\ h_1, h_2, \ldots h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}.$$

Jede solche Charakteristik können wir als Matrix von zwei Zeilen und n Kolonnen auffassen. Eine solche Matrix können wir uns aus zwei Matrizen auf mannigfache Art zusammengesetzt denken. Wählen wir nämlich ν Vertikalreihen aus der Matrix (2.), so bilden diese für sich eine Matrix derselben Art, und diese kann wieder als Charakteristik einer Thetafunktion von ν Veränderlichen aufgefaßt werden. Ebenso bilden die $n-\nu$ in (2.) stehen bleibenden Vertikalreihen die Charakteristik einer Thetafunktion von $n-\nu$ Veränderlichen. Wir können uns also jede Charakteristik n-ter Ordnung

der zweiten Art, so geht sie über in

$$f\,\frac{\varphi_{\pi_\alpha\mu\nu}\,\varphi_{\pi_\alpha\pi_\beta\mu\nu}}{\varphi_{\pi_0\lambda\nu}\,\varphi_{\pi_0\pi_\beta\lambda\nu}},$$

wo f einen Exponentialfaktor bedeutet. Dieser Faktor ist aber derselbe, der auftritt, wenn man in der Funktion

$$\frac{\vartheta_\mu^2}{\vartheta_\lambda^2}$$

die Argumente um dieselbe halbe Periode ν vermehrt.

Es verhalten sich daher die Produkte

$$\varphi_{\pi_\alpha\mu}\,\varphi_{\pi_\alpha\pi_\beta\mu}$$

in bezug auf die Perioden zweiter Art wie die Quadrate der Thetafunktionen von ν Veränderlichen.

Vermehren wir in der Funktion (1.) die Argumente um eine der halben Perioden π, so geht sie über in

$$\frac{\varphi_{\pi_\alpha\pi\mu}\,\varphi_{\pi_\alpha\pi_\alpha\pi\mu}}{\varphi_{\pi_0\pi\lambda}\,\varphi_{\pi_0\pi_\beta\pi\lambda}},$$

ohne daß ein Faktor hinzuträte.*)

Wir können daher leicht 4^ν Funktionen herstellen, die bei Vermehrung der Argumente um eine halbe Periode π alle denselben Faktor annehmen und sich bei Vermehrung der Argumente um eine halbe Periode der zweiten Art im wesentlichen wie die Quadrate der Thetafunktionen von ν Veränderlichen verhalten. Wir bilden nämlich den Ausdruck

$$(2.)\qquad A_\mu = \sum_\pi (\pi)\,\varphi_{\pi\mu}\,\varphi_{\pi\pi_\alpha\mu},$$

wo die Summe über alle Perioden π zu erstrecken ist, und wo die Größen (π) Vorzeichen bedeuten, über die bald näheres festgesetzt wird.

Vermehren wir in (2.) die Argumente um die halbe Periode π_β, so geht A_μ bis auf einen Exponentialfaktor über in

$$(3.)\qquad \sum_\pi (\pi)\,\varphi_{\pi\pi_\beta\mu}\,\varphi_{\pi\pi_\alpha\pi_\beta\mu}.$$

---

*) Daher kommt es, daß gerade die Perioden π benutzt werden müssen und daß man nicht statt ihrer die Perioden ω nehmen kann.

Da $\pi\pi_\beta$ gleichzeitig mit π alle halben Perioden π durchläuft, so können wir in (3.) statt $\pi\pi_\beta$ auch wieder π schreiben. Dann wird (3.) zu

$$\sum_\pi (\pi\pi_\beta)\,\varphi_{\pi\mu}\,\varphi_{\pi\pi_\alpha\mu}.$$

Setzen wir nun fest, daß die Vorzeichen (π) dem Gesetze

$$(4.)\qquad (\pi_\alpha\pi_\beta) = (\pi_\alpha)(\pi_\beta)$$

gehorchen, so ändert sich A_μ bei Vermehrung der Argumente um eine der halben Perioden π nur um einen von dem Index μ unabhängigen Faktor.

Wir wollen jetzt zusehen, wieviel Größen A_μ wir bei festgehaltenem μ durch verschiedene Wahl von α und der Vorzeichen (π) bekommen. Es lassen sich $n-\nu$ aus den Charakteristiken π so auswählen, daß sich alle anderen aus ihnen zusammensetzen lassen. Man kann dazu z. B. *die* $n-\nu$ verschiedenen nehmen, die nur an einer Stelle eine Eins enthalten. Dem entsprechend kann man $n-\nu$ von den Vorzeichen (π) willkürlich wählen. Die anderen sind dann nach der Regel (4.) bestimmt. Es gibt also $2^{n-\nu}$ Möglichkeiten, die Vorzeichen (π) zu wählen.

Wählen wir in (2.) α gleich Null, so besteht A_μ aus $2^{n-\nu}$ Thetaquadraten. Wir bekommen $2^{n-\nu}$ solcher Größen. Ist α in (2.) von Null verschieden, so besteht A_μ aus $2^{n-\nu}$ Thetaprodukten der Charakteristik π_α, von denen aber je zwei einander gleich sind. Wir bekommen in diesem Falle für jede Wahl von α nur $\frac{1}{2}\cdot 2^{n-\nu} = 2^{n-\nu-1}$ Größen A_μ, da die andere Hälfte identisch verschwindet, indem die paarweise gleichen Produkte verschiedenes Vorzeichen bekommen.

Da α, wenn es von Null verschieden sein soll, noch auf $2^{n-\nu}-1$ verschiedene Arten gewählt werden kann, so bekommen wir im ganzen

$$2^{n-\nu} + \frac{1}{2}\,2^{n-\nu}(2^{n-\nu}-1) = 2^{n-\nu-1}(1+2^{n-\nu})$$

Größen A_μ bei feststehendem μ.

Wir denken uns jetzt für das folgende α und die Vorzeichen (π) fest gewählt. Dann erhalten wir, indem wir μ alle möglichen Werte beilegen, 4^ν Funktionen A_μ. Diese Funktionen nehmen bei Vermehrung der Argumente um die halben Perioden π alle denselben Faktor an und verhalten sich bei der Vermehrung um eine halbe Periode der zweiten Art im wesentlichen wie die Quadrate der Thetafunktionen von ν Veränderlichen.

§ 3.

Wir wollen jetzt zeigen, daß zwischen den im vorigen Paragraphen definierten Größen A_μ dieselben linearen Gleichungen bestehen wie zwischen den Quadraten der Theta von ν Veränderlichen. Wenn wir in irgend einer der linearen Gleichungen zwischen den Quadraten der Funktionen ϑ_μ, das heißt der Theta von ν Veränderlichen, die konstanten Faktoren bestimmen wollen, so setzen wir in die betreffende Gleichung der Reihe nach für die Argumente verschiedene halbe Perioden und bekommen dann immer genügend Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten. Wir denken uns irgend eine der linearen Gleichungen zwischen den Funktionen ϑ_μ^2 mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt und bezeichnen sie mit (I.). Ersetzen wir in dieser Gleichung die Funktionen ϑ_μ^2 durch die Funktionen A_μ, so bekommen wir eine lineare Gleichung zwischen den Größen A_μ, die wir mit (II.) bezeichnen. Es ist aber wohl darauf zu achten, daß wir von vornherein nicht wissen, ob überhaupt eine Gleichung von der Form wie (II.) existiert. Um nun in den Gleichungen (I.) und (II.) die Koeffizienten zu bestimmen, ersetzen wir in ihnen die Argumente durch verschiedene halbe Perioden der zweiten Art. Die zwei Reihen von Gleichungen, die wir auf diese Art bekommen, unterscheiden sich von einander nur dadurch, daß in den aus (I.) hervorgehenden die Nullwerte der ϑ_μ^2 vorkommen, während in den aus (II.) hervorgehenden die Nullwerte der A_μ vorkommen. Zufolge der von den Größen A_μ bewiesenen Eigenschaften gehen die Gleichungen der zweiten Reihe aus denen der ersten dadurch hervor, daß man die Nullwerte der ϑ_μ^2 durch die Nullwerte der A_μ ersetzt. Die Rechnung zur Bestimmung der Konstanten in der Gleichung (II.) ist also vollkommen. dieselbe wie die zur Bestimmung der Konstanten in (I.). Die Gleichungen, die wir auf diesem Wege zwischen den Größen A_μ erhalten würden, können wir demnach einfacher erhalten, indem wir in den zwischen den Größen ϑ_μ^2 bestehenden Gleichungen die Größen ϑ_μ^2 und ihre Nullwerte ersetzen durch die Größen A_μ und ihre Nullwerte.

Die so erhaltenen Gleichungen bleiben der Herleitung nach richtig, wenn man die Argumente um irgend eine halbe Periode der zweiten Art vermehrt. Da aber die Größen A_μ nur einen von μ unabhängigen Faktor annehmen, wenn wir die Argumente um eine der halben Perioden π vermehren, und da die Gleichungen außerdem homogen sind, so folgt, daß die

Gleichungen auch richtig bleiben, wenn wir die Argumente um eine der halben Perioden π vermehren.

Damit ist nun aber noch nicht gezeigt, daß die so erhaltenen Gleichungen zwischen den Größen A_μ wirklich bestehen. Das soll im folgenden Paragraphen geschehen. Es ist bis jetzt nur gezeigt, daß sich in einer Gleichung der Form (II.) die Koeffizienten so werden bestimmen lassen, daß die Gleichung richtig bleibt bei Vermehrung der Argumente um halbe Perioden der zweiten Art oder um halbe Perioden π. Wir wissen aber nicht, ob überhaupt eine Gleichung der Form (II.) existiert.

§ 4.

Wir betrachten zunächst eine Methode, die linearen Gleichungen zwischen den Größen ϑ_μ^2 herzuleiten. Dazu gehen wir aus von der *Weierstraß*schen Formel

$$(1.)\qquad \vartheta^2_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(u) = \sum_{\sigma_i} (-1)^{\Sigma(h_i+\sigma_i)g_i} \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ h_i+\sigma_i \end{smallmatrix}\right|}(0|2\tau)\, \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ \sigma_i \end{smallmatrix}\right|}(2u|2\tau).\text{*)}$$

Es ist nun zweckmäßig, die Charakteristiken zweiter Art ähnlich zu bezeichnen wie die erster Art. Wir wollen also diejenigen Charakteristiken zweiter Art, die in der ersten Zeile lauter Nullen enthalten, mit π' und diejenigen, die in der zweiten Zeile lauter Nullen enthalten, mit ω' bezeichnen. Die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ bezeichnen wir mit μ, die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix}\right|$ mit π'_μ, die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ \sigma \end{smallmatrix}\right|$ mit π' und das Vorzeichen $(-1)^{\Sigma(h+\sigma)g}$, das von den Charakteristiken μ und $\pi'\pi'_\mu$ abhängt, mit $(\mu|\pi'\pi'_\mu)$. Dann können wir die Gleichung (1.), wenn wir noch zur Abkürzung

$$\vartheta_{\pi'}(2u|2\tau) = [\pi']$$

setzen und durch den Index 0 ausdrücken, daß die Argumente gleich Null gesetzt werden sollen, so schreiben

$$(2.)\qquad \vartheta_\mu^2 = \sum_{\pi'} (\mu|\pi'\pi'_\mu)[\pi'\pi'_\mu]_0[\pi'].$$

*) Siehe z. B. *Wirtingers* Preisschrift über Thetafunktionen. Leipzig 1895. Seite 9, Formel (4). Dabei ist aber darauf zu achten, daß ich eine Charakteristik, die *Wirtinger* mit $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ bezeichnet, umgekehrt mit $\left|\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right|$ bezeichne.

Wir erhalten auf diese Weise alle Funktionen ϑ_μ^2 als lineare homogene Funktionen der 2^ν Größen $[\pi']$. Eliminieren wir aus diesen Gleichungen die Größen $[\pi']$, so bekommen wir alle linearen Gleichungen zwischen den ϑ_μ^2. Diese Gleichungen haben homogene Funktionen der Größen $[\pi']_0$ zu Koeffizienten. Setzen wir in der Gleichung (2.) die Argumente gleich Null, so bekommen wir, wenn wir den Nullwert von ϑ_μ mit c_μ bezeichnen,

$$(3.) \qquad c_\mu^2 = \sum_{\pi'} (\mu|\pi'\pi'_\mu)[\pi'\pi'_\mu]_0 [\pi']_0 .$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich aber die Produkte $[\pi']_0[\pi'\pi'_\mu]_0$ als lineare homogene Funktionen der Größen c_μ^2 ausrechnen.*) Also lassen sich auch die Verhältnisse je zweier der Größen $[\pi']$ rational durch die Größen c_μ^2 ausdrücken. Wir können folglich in die Gleichungen zwischen den Funktionen ϑ_μ^2 statt der Größen $[\pi']_0$ die Größen c_μ^2 einführen.

Dies Resultat können wir so aussprechen. Wir bekommen aus den Gleichungen (2.) und (3.) durch Elimination der Größen $[\pi']$ und $[\pi']_0$ die linearen Gleichungen zwischen den Funktionen ϑ_μ^2 mit Koeffizienten, die rationale homogene Funktionen der Größen c_μ^2 sind.

Wir zeigen jetzt, daß für die Größen A_μ und ihre Nullwerte, die wir mit a_μ bezeichnen wollen, den Gleichungen (2.) und (3) ganz analoge Gleichungen bestehen. Dazu gehen wir wieder von der etwas allgemeineren *Weierstraß*schen Gleichung aus

$$(4.) \quad \varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v+u)\,\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v-u) = \sum_{\sigma_i} (-1)^{\Sigma(h_i+\sigma_i)g_i} \varphi_{\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ h_i+\sigma_i \end{smallmatrix}\right|}(2v|2\tau)\,\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ \sigma_i \end{smallmatrix}\right|}(2u|2\tau).$$

Hierin soll $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ eine Charakteristik der Form $\pi_\alpha\mu$ bedeuten, so daß also *die* Zahlen g, die dem ersten Teile der Charakteristik entsprechen, gleich Null sind. Wir bezeichnen die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix}\right|$ mit $\pi_\alpha\pi'_\mu$, die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ \sigma \end{smallmatrix}\right|$ mit $\pi\pi'$. Vermehren wir in Gleichung (4.) die Veränderlichen u und v um die Hälfte der Halbperiode

$$\pi_\lambda = \left|\begin{matrix} 0 \\ \nu \end{matrix}\right|$$

und setzen dann die Argumente v gleich Null, so lautet sie

*) Vergl. hierzu *Wirtinger* a. a. O. Seite 9, Formel (5) und § 22.

$$(5.)\quad \begin{cases} \varphi_{\left|{g \atop h+\nu}\right|}(u)\,\varphi_{\left|{g \atop h}\right|}(u) \\ \qquad = f\sum_{\sigma_i}(-1)^{\Sigma(h_i+\sigma_i)g_i}\,e^{\pi i\frac{1}{2}\Sigma\nu_i g_i}\,\varphi_{\left|{0 \atop h_i+\sigma_i}\right|}(\pi_\lambda|2\tau)\,\varphi_{\left|{0 \atop \sigma_i}\right|}(2u+\pi_\lambda|2\tau). \end{cases}$$

Dabei bedeutet f einen von μ unabhängigen Faktor. Ferner ist

$$e^{\frac{1}{2}\pi i\Sigma\nu g} = +1,$$

da von den Größen ν nur *die* von Null verschieden sind, die sich auf den ersten Teil der Charakteristik beziehen und von den Größen g nur *die*, die sich auf den zweiten Teil der Charakteristik beziehen. Das dann noch unter dem Summenzeichen stehende Vorzeichen hängt nur ab von μ und $\pi'_\mu\pi'$ und ist nichts anderes, als das früher mit $(\mu|\pi'\pi'_\mu)$ bezeichnete Vorzeichen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\varphi_{\pi\pi'}(2u+\pi_\lambda|2\tau) = \{\pi\pi'\},$$

so lautet die Gleichung (5.) mit unserer Bezeichnung

$$(6.)\qquad \varphi_{\pi_\alpha\mu}\,\varphi_{\pi_\alpha\pi_\lambda\mu} = f\sum_{\pi,\pi'}(\mu|\pi'\pi'_\mu)\{\pi\pi'\pi_\alpha\pi'_\mu\}_0\{\pi\pi'\},$$

wo durch den Index 0 angedeutet ist, daß die Argumente gleich Null sind. Nun war aber

$$A_\mu = \sum_{\pi_\alpha}(\pi_\alpha)\,\varphi_{\pi_\alpha\mu}\,\varphi_{\pi_\alpha\pi_\lambda\mu}.$$

Also wird mit Benutzung von (6.)

$$A_\mu = f\sum_{\pi,\pi'}\Big[(\mu|\pi'\pi'_\mu)\{\pi\pi'\}\sum_{\pi_\alpha}(\pi_\alpha)\{\pi\pi'\pi_\alpha\pi'_\mu\}_0\Big].$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\sum_{\pi_\alpha}(\pi_\alpha)\{\pi_\alpha\pi\pi'\pi'_\mu\} = (\pi)\sum_{\pi_\alpha}(\pi_\alpha)\{\pi_\alpha\pi_0\pi'\pi'_\mu\} = (\pi)\,[\pi'\pi'_\mu],$$

so bekommen wir

$$(7.)\quad A_\mu = f\sum_{\pi'}\Big[(\mu|\pi'\pi'_\mu)[\pi'\pi'_\mu]_0\sum_{\pi}(\pi)\{\pi\pi'\}\Big] = f\sum_{\pi'}(\mu|\pi'\pi'_\mu)[\pi'\pi'_\mu]_0[\pi'].$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen der Gleichung (2.), nur daß hier die Ausdrücke $[\pi']$ und $[\pi']_0$ eine andere Bedeutung haben. Das macht

aber nichts aus, da sie eliminiert werden sollen. Setzen wir endlich noch in der Gleichung (7.) die Argumente gleich Null, so bekommen wir

$$(8.) \qquad a_\mu = f \sum_{\pi'} (\mu \mid \pi' \pi'_\mu) [\pi' \pi'_\pi]_0 [\pi']_0,$$

eine Gleichung, die vollkommen der Gleichung (3.) entspricht.

Es müssen sich nun aus den Gleichungen (7.) und (8.) die Größen $[\pi']$ und $[\pi']_0$ gerade so eliminieren lassen, wie aus den Gleichungen (2.) und (3.). Die Gleichungen zwischen den Größen A_μ und a_μ, die wir so erhalten, bekommen wir danach offenbar einfacher, indem wir in den aus (2.) und (3.) hergeleiteten Gleichungen zwischen ϑ_μ^2 und c_μ^2 die Größen ϑ_μ^2 und c_μ^2 durch die Größen A_μ und a_μ ersetzen.

Damit ist aber der anfangs ausgesprochene Satz bewiesen.

Verallgemeinerung eines Satzes von *Schönemann*.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

1. Es sei

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n \tag{1.}$$

eine Form mit ganzzahligen Koeffizienten c_i. Wir wollen voraussetzen, daß die Form $f(z)$ nach dem Primzahlmodul p irreduzibel ist. Es sei ferner der Grad der Form $M(z)$ (die ev. z gar nicht enthält) kleiner als der Grad von $f^t(z)$ und wir nehmen an, daß $M(z)$ durch $f(z)$ $(mod\, p)$ nicht teilbar ist. Dann besteht der folgende Satz:

Wenn im Sinne der Äquivalenz

$$(t, \alpha) = 1$$

ist, so ist die Gleichung

$$F(z) = f^t(z) + p^\alpha M(z) = 0 \tag{I.}$$

irreduzibel.

Für den speziellen Fall $\alpha = 1$ ist der Satz schon von *Schönemann**) bewiesen worden.

2. Es sei w eine Wurzel der Gleichung (I.), die den Gattungsbereich (Γ) bestimmt. Nun ist vorerst, nach unseren Prämissen, $f(w)$ eine *ganze* Zahl und es folgt aus (I.)

$$f^t(w) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}. \tag{2.}$$

*) Dieses Journal Bd. 32. Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. § 61. Sein Beweis läßt sich leicht vereinfachen, indem man ihn im Bereiche der rat. Zahlen führen kann. An dieser Stelle will ich noch die einschlägigen Arbeiten des Herrn *Netto* zitieren: Über die Irr. ganzzahliger ganzer Funktionen (Oberhessische Ber. 31), Über die Irr. usw. (Math. Annalen 48.)

Wir werden zeigen, daß im Sinne der Äquivalenz die Relation

$$(2^*.) \qquad \left(\frac{f'(w)}{p^a}, p\right) = 1$$

besteht. Wenn nämlich M die Unbestimmte z gar nicht enthält, so muß M relativ prim gegen p sein und so ersieht man aus (I.) die Richtigkeit von (2*.). Enthält dagegen die Form M die Unbestimmte z, dann ist, nach den Prämissen, die Resultante

$$R = \operatorname{Res}\begin{pmatrix} f'(z), & M(z) \\ z & , & 1 \end{pmatrix}$$

relativ prim gegen p, d. h.

$$(3.) \qquad (R, p) = 1.$$

Es ist noch bekannterweise

$$(3^*.) \qquad R = Uf'(z) + VM(z),$$

wo die Formen U, V ganzzahlige Koeffizienten besitzen. Und so folgt aus (3.) und (3*.), daß im Sinne der Äquivalenz

$$(M(w), p) = 1$$

und infolgedessen

$$(2^*.) \qquad \left(\frac{f'(w)}{p^a}, p\right) = 1$$

ist.

3. Nun werden wir beweisen, daß der Grad von (Γ) durch t teilbar ist. Es sei nämlich in Primidealfaktoren zerlegt

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{e_k}$$

und es sei

$$f(w) = \mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{a_k}\mathfrak{Q}, \qquad (p, \mathfrak{Q}) = 1;$$

dann hat man nach (2.) und (2*.):

$$ta_i = \alpha e_i. \qquad (i=1,2,\ldots k)$$

Da jedoch

$$(t, \alpha) = 1$$

ist, so bekommt man

$$(4.) \qquad e_i \equiv 0 \pmod{t}.$$

Infolgedessen ist die in bezug auf (Γ) gebildete $\mathfrak{N}mp$ durch p^t teilbar, woraus unsere Behauptung folgt.

4. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$ einen beliebigen Primidealfaktor von p. Unser Satz wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß der Grad von $\mathfrak{p}$ nicht kleiner als n ist, denn in diesem Falle wird Nmp durch $p^{n\iota}$ teilbar sein. Außer dem gewünschten Beweise wird auf diese Weise noch mitbewiesen, daß

$$p = \mathfrak{p}^{\iota}$$

ist.

Unsere Behauptung bezüglich des Grades von $\mathfrak{p}$ bedeutet aber nichts anderes, als daß die Anzahl der (mod $\mathfrak{p}$) inkongruenten ganzen Zahlen nicht kleiner als p^n ist. Das kann man aber bestätigen, indem man zeigt, daß, wenn $g(z)$ eine Form bezeichnet, deren höchster Koeffizient gleich Eins ist, dann aus der Kongruenz

$$(5.) \qquad g(w) \equiv 0 \qquad (\text{mod } \mathfrak{p})$$

die Kongruenz

$$(5^*.) \qquad g(z) \equiv 0 \qquad (\text{modd } p, f(z))$$

folgt. Wenn nämlich die Kongruenz (5*.) nicht besteht, dann sind die Formen $f(z)$, $g(z)$ (mod p) relativ prim; es existieren mithin solche Formen $C(z)$, $D(z)$, die der Relation

$$C(z)g(z) + D(z)f(z) \equiv 1 \qquad (\text{mod } p)$$

genügen, woraus die Relation

$$(6.) \qquad \{C(z)g(z) - 1\}^{\iota} \equiv D^{\iota}(z)f^{\iota}(z) \qquad (\text{mod } p)$$

folgt. Es ist aber

$$f^{\iota}(w) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{\alpha}),$$

infolgedessen

$$\{C(w)g(w) - 1\}^{\iota} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

d. h.

$$(6^*.) \qquad g(w)\bar{C}(w) \equiv (-1)^{\iota+1} \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}),$$

also ist in der Tat die Kongruenz (5.) nicht erfüllt, womit der Beweis geleistet ist. Die zweimalige Anwendung des Satzes zeigt, daß die Form $F(z)$ schon (mod $p^{\alpha+1}$) irreduzibel ist in dem Sinne, daß sie nicht als ein Produkt solcher Formen darstellbar ist, deren höchste Koeffizienten in z relativ prim gegen p sind.



Band 128. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätsstraße 54.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 128.

Heft II.

Ausgegeben den 10. Dezember.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1904.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Theorie der parallelprojektiv-trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

(Hierzu Tafel I, Fig. 1–24.)

Von Herrn *Guido Hauck*.

In meinem Aufsatze: „*Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. V. Artikel: Zusammenfassung und wichtige Spezialfälle*"*) habe ich in der „*Schlußbemerkung*" (S. 233) bereits auf den Sonderfall der projektiv-trilinearen Verwandtschaft hingewiesen, der durch die Bedingung charakterisiert ist, daß in jedem Tripel zugeordneter Geraden die unendlich fernen Punkte einander zugeordnet sein sollen. Drei zugeordnete Punktreihen, die in der allgemeinen Verwandtschaft projektiv sind, werden dann *ähnlich*. Ich habe diese Spezialform als „*parallelprojektiv-trilineare Verwandtschaft*" gekennzeichnet, da, wie sich leicht ergibt, drei ebene Systeme, die sich in ihr entsprechen, stets als drei verschiedene Parallelprojektionen eines und desselben räumlichen Systems angesehen werden können.

Die genannte Bedingung ist nur dadurch erfüllbar, daß in jedem System die zwei Kernpunkte und also auch ihre Verbindungslinie („Hauptachse") ins Unendliche fallen, was weiter zur Folge hat, daß in je zwei Systemen die projektiven gegnerischen Kernstrahlenbüschel (in denen die Hauptachsen entsprechende Strahlen bilden) zu *ähnlichen Parallelstrahlenbüscheln* werden. Denn da einem unendlich fernen Punkt eines Systems in einem der zwei anderen Systeme die sämtlichen Punkte des betreffenden gegnerischen Kernstrahls zugeordnet sind, und da diese alle im Unendlichen liegen sollen, so muß der ganze Kernstrahl ins Unendliche fallen. Das

*) Siehe dieses Journal, Bd. 111, S. 207.

Gleiche gilt für den ihm entsprechenden Kernstrahl im ersten System. Die zwei gegnerischen Kernstrahlenbüschel müssen folglich zu Parallelstrahlenbüscheln werden, in denen die unendlich fernen Strahlen sich entsprechen, das heißt: — zu Parallelstrahlenbüscheln, die einander *ähnlich* sind.

Auf diese Erwägungen gründet sich die nachstehende Definition der Verwandtschaft.

§ 1.

Definition und Bestimmung der Verwandtschaft.

Wir nehmen zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen die folgende *Definition:*

> *In jeder von drei Ebenen S, S', S'' liegen zwei Parallelstrahlenbüschel: $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{Q}''$. Von diesen sind je zwei in verschiedenen Ebenen liegende, nämlich: $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{Q}''$ und $\mathfrak{P}$, zu einander ähnlich und werden als gegnerische Kernstrahlenbüschel bezeichnet. Werden die Punkte der drei Ebenen in der Art auf einander bezogen, daß drei zugeordnete Punkte x, x', x'' dreifach gebunden sind durch die Bedingung, es sollen je zwei derselben auf entsprechenden Strahlen der betreffenden gegnerischen Kernstrahlenbüschel liegen, so bilden sie drei parallelprojektiv-trilineare ebene Punktsysteme.*

Um ein Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' zu bestimmen, verfährt man hiernach wie folgt (vergl. Fig. 1): Man wählt auf zwei entsprechenden Strahlen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$ der gegnerischen Kernstrahlenbüschel $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}'$ die Punkte x und x' beliebig, zieht durch x und x' die zwei anderen Kernstrahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}'$, bestimmt zu $\mathfrak{p}$ den entsprechenden gegnerischen Kernstrahl $\mathfrak{q}''$, und zu $\mathfrak{q}'$ den entsprechenden gegnerischen Kernstrahl $\mathfrak{p}''$, dann ergibt sich der dritte zugeordnete Punkt x'' als Schnittpunkt von $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{q}''$.

Was die Zuordnung der *geraden Linien* anlangt, so sind diese, wie in der allgemeinen projektiv-trilinearen Verwandtschaft, *zweifach* gebunden. Von einem Tripel zugeordneter Geraden $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ (vergl. Fig. 1) können zwei, z. B. $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, willkürlich gewählt werden. Die dritte $\mathfrak{l}''$ bestimmt sich dann dadurch, daß man auf $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ zwei Paare zugeordneter Punkte x, x' und y, y' markiert (indem man $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ durch zwei Paare entsprechender Strahlen der gegnerischen Kernbüschel $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}'$ in x, x' und y, y' durchschneidet), zu ihnen die dritten zugeordneten Punkte x'' und y'' bestimmt und diese verbindet.

Betreffs der Willkürlichkeit der Wahl von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ besteht jedoch die Beschränkung, daß, wenn $\mathfrak{l}$ mit einem Kernstrahl $\mathfrak{q}$ zusammenfällt, $\mathfrak{l}'$ mit dem entsprechenden gegnerischen Kernstrahl $\mathfrak{p}'$ zusammenfallen muß; $\mathfrak{l}''$ wird dann unbestimmt.

Die zugeordneten Punkte auf $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ bilden ähnliche Punktreihen, welche durch die gegnerischen Kernstrahlenbüschel ausgeschnitten werden.

Die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ sind einander zugeordnet. Durch jedes Tripel zugeordneter Geraden ist also ein Tripel zugeordneter *Richtungen* bestimmt, zu welchem ein paralleles Geradentripel durch jedes Punktetripel vorhanden ist.

Die Verwandtschaft ist *bestimmt* durch die drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel. Nun sind in zwei ähnlichen Parallelstrahlenbüscheln die Abstände entsprechender Strahlen proportioniert; sie sind daher bestimmt durch 2 Paare entsprechender Strahlen. Hieraus folgt:

Die parallelprojektiv-trilineare Verwandtschaft zwischen drei ebenen Systemen ist vollständig und eindeutig bestimmt, wenn von jedem Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel 2 Paare entsprechender Strahlen gegeben sind, und demgemäß auch —: wenn die sechs Kernstrahlen-Richtungen und 2 Tripel zugeordneter Punkte gegeben sind, jedoch mit der Beschränkung, daß in keinem System die Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte parallel zu einer der zwei Kernrichtungen sein darf.

Die *spitzen* Winkel $\omega, \omega', \omega''$, die von den zwei Kernrichtungen jedes Systems gebildet werden, mögen als *Kernwinkel* bezeichnet werden (ihre stumpfen Nebenwinkel nennen wir Kern-Nebenwinkel). Ferner mögen die drei Verhältnisse $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{20}$ der Abstände je zweier entsprechenden gegnerischen Kernstrahlenpaare als *Kernbüschelverhältnisse* bezeichnet werden, mit der Maßgabe, daß, wenn z. B. in den gegnerischen Kernstrahlenbüscheln $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{P}''$ (vergl. Fig. 1) zwei Strahlen des ersten Büschels den Abstand q', die entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels den Abstand p'' haben,

$$\frac{q'}{p''} = \varepsilon_{12} \quad \text{oder} \quad \frac{p''}{q'} = \varepsilon_{21}$$

gesetzt wird. — Es können nun auch die sechs Größen

$$\omega, \omega', \omega''; \; \varepsilon_{01}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{20}$$

als Bestimmungselemente für die Verwandtschaft dienen. Denn durch sie sind die sechs Kernstrahlenbüschel bestimmt.

Indessen ist zu beachten, daß diese Art der Bestimmung eine *zweideutige* ist. Denn transformiert man die Punkte irgend eines der drei Systeme, z. B. S, schiefsymmetrisch, indem man die Symmetralachse parallel zu einer seiner zwei Kernrichtungen —, die Symmetrierichtung parallel zur anderen wählt, so erhält man ein neues System Σ, das von S verschieden ist, aber mit den zwei anderen Systemen S' und S'' in einer durch die nämlichen sechs Bestimmungselemente definierten Verwandtschaft steht wie S.

Die Zweideutigkeit wird gehoben, sobald 2 Tripel zugeordneter Punkte festgesetzt sind.

In derselben Weise wie S könnte auch eines der zwei anderen Systeme — oder könnten gleichzeitig mehrere Systeme einer schiefsymmetrischen Transformation unterworfen werden. Daß man jedoch hierdurch zu keiner weiteren Verwandtschaftsform gelangt, sondern daß die Zahl der Möglichkeiten auf 2 beschränkt bleibt, wird in § 3 gezeigt werden.

Zwei solche verschiedenen Verwandtschaftsformen, die durch die nämlichen sechs Bestimmungselemente $\omega, \omega', \omega''$; $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{20}$ definiert sind, sollen als zu einander *supplementär* bezeichnet werden.

§ 2.

Ebene Orientierung.

Da zwei ähnliche Parallelstrahlenbüschel bei jeder beliebigen Lage in einer Ebene perspektiv sind, so befinden sich drei parallelprojektiv-trilineare Systeme, wenn sie ganz beliebig in eine Ebene gelegt werden, stets in *orientierter Lage im weiteren Sinn*, das heißt: in solcher Lage, daß sich die drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel nach drei geraden Linien, den drei *Grundschnitten*, schneiden. So zeigt z. B. Fig. 1 die drei Systeme S, S', S'' (die wir uns etwa durch die zwei Punktetripel x, x', x'' und y, y', y'' nebst den sechs Kernrichtungen gegeben denken) beliebig in die Zeichenebene gelegt; es sind dann je zwei entsprechende gegnerische Kernstrahlen zum Schnitt gebracht und die Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{20}$ als Verbindungslinien der gleichartigen Schnittpunkte gezogen.

Die drei Grundschnitte schneiden sich hierbei im allgemeinen nicht in dem nämlichen Punkt. Es kann aber nachträglich leicht durch Parallelverschiebung eines Systems eine *Orientierung im engeren Sinn* hergestellt werden, bei der sich die Grundschnitte im nämlichen Punkt schneiden.

Man kann z. B. (vergl. Fig. 1) durch den Schnittpunkt O von $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{12}$ die Linie $(\mathfrak{g}_{20})$ parallel zu $\mathfrak{g}_{20}$ ziehen und das System S'' parallel mit der Kernrichtung $\mathfrak{p}''$ so lange verschieben, bis die gegnerischen Kernstrahlen der Punkte x'' und x sich auf $(\mathfrak{g}_{20})$ schneiden.

Wir bezeichnen bei einer Orientierung im engeren Sinn (vergl. Fig. 2) den gemeinschaftlichen Schnittpunkt O der drei Grundschnitte als *Scheitelpunkt.* Er — und nur er — hat die besondere Eigenschaft, daß in ihm ein Tripel zugeordneter Punkte vereinigt liegt.

Um daher eine Orientierung im engeren Sinn sofort zu erhalten, kann man die drei Systeme gleich zu Anfang so legen, daß drei zugeordnete Punkte in einem Punkte zusammenfallen. Der Vereinigungspunkt ist dann der Scheitelpunkt; seine Verbindungslinien mit den Schnittpunkten je zweier gegnerischen Kernstrahlen eines zweiten Punktetripels bilden die Grundschnitte.

Bei ebener Orientierung macht sich nun die Bestimmung von weiteren Tripeln zugeordneter Punkte und die Ausführung aller einschlägigen Konstruktionen sehr bequem. Der bezügliche Zuordnungsmechanismus zwischen den Punkten der drei Systeme kann wie folgt formuliert werden:

Bewegt sich ein veränderliches ebenes Sechseck so, daß seine Seiten sich beständig parallel bleiben, während drei seiner Ecken auf drei festen Leitgeraden gleiten, so beschreiben die drei freien Ecken drei parallelprojektiv-trilineare Systeme.

Beschränkt man die Bewegung einer freien Ecke, z. B. x'', auf eine gerade Linie $\mathfrak{l}''$, so beschreiben die zwei anderen freien Ecken x und x' zwei *affine* Systeme. Denn es sind dann (vergl. Fig. 1) nicht bloß ihre gegnerischen Kernstrahlen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$, sondern auch ihre zwei anderen Kernstrahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}'$ ähnlich auf einander bezogen; die von x und x' beschriebenen Systeme erscheinen also als Erzeugnisse von zwei Paaren ähnlicher Parallelstrahlenbüschel.

Dies gilt jedoch nicht umgekehrt. Solchen Paaren von zugeordneten Punkten x und x', die zweien in S und S' enthaltenen affinen Systemen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ angehören, sind im allgemeinen in S'' nicht Punkte einer geraden Linie zugeordnet, sondern Punkte, die einem zu $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ affinen System $\mathfrak{S}''$ angehören. Dies ergibt sich leicht wie folgt:

Sind $a a' a''$, $b b' b''$, $c c' c''$ drei Tripel zugeordneter Punkte, so sind durch die drei Dreiecke abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ drei affine Systeme $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{S}''$

bestimmt. Stellen nun x, x', x'' irgend drei Punkte vor, die sich in diesen affin entsprechen, so müssen x, x', x'' auch in der trilinearen Verwandtschaft drei zugeordnete Punkte bilden. Denn zieht man $ax, a'x', a''x''$, welche die Linien $bc, b'c', b''c''$ bezw. in y, y', y'' schneiden, so werden vermöge der affinen Zuordnung die Strecken $bc, b'c', b''c''$ in den Punkten y, y', y'' nach dem nämlichen Verhältnis geteilt, desgleichen die Strecken $ay, a'y', a''y''$ in den Punkten x, x', x''. Hieraus aber folgt vermöge der Ähnlichkeit der auf den Linien $bc, b'c', b''c''$ liegenden trilinear-zugeordneten Punktreihen, daß die Punkte y, y', y'' — und demgemäß auch die Verbindungslinien $ay, a'y', a''y''$ einander trilinear zugeordnet sind. Weiter folgt dann vermöge der Ähnlichkeit der zugeordneten Punktreihen der Linien $ay, a'y', a''y''$, daß auch die Punkte x, x', x'' einander trilinear zugeordnet sind.

In derselben Weise sind durch jedes Tripel zugeordneter Dreiecke drei affine Systeme bestimmt, deren entsprechende Punkte einander trilinear zugeordnet sind. Drei parallelprojektiv-trilineare Systeme enthalten also in sich unendlich viele —, und zwar (vergl. § 4) ∞^3 *Tripel von einander zugeordneten affinen Systemen.* — Liegen die Ecken eines der drei Dreiecke in gerader Linie, so hat man den zuerst erwähnten speziellen Fall.

§ 3.

Die zwei supplementären Verwandtschaftstypen.

Mit Hilfe der ebenen Orientierung gewinnt man leicht einen genaueren Einblick in die Beziehungen der am Schluß des § 1 erwähnten zwei supplementären Verwandtschaftsformen, die durch ein gegebenes Wertsystem der drei Kernwinkel und der drei Kernbüschelverhältnisse bestimmt sind.

Zunächst erhellt, daß es bei der schiefsymmetrischen Transformation, wie sie in § 1 mit dem System S vorgenommen wurde, gleichgültig ist, parallel mit welcher der zwei Kernrichtungen einerseits die Symmetralachse, andererseits die Symmetrierichtung gewählt wird. Denn sind (vergl. Fig. 2) a, a', a'' und x, x', x'' zwei Tripel zugeordneter Punkte, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die zwei Kernstrahlen von a, und ist ξ der zu x schiefsymmetrische Punkt in Beziehung auf die Symmetralachse $\mathfrak{q}$, ferner (ξ) derjenige in Beziehung auf die Symmetralachse $\mathfrak{p}$, so braucht man nur das System S in seiner Ebene um den Punkt a um 180^0 zu drehen, so gelangt Punkt (ξ) in die nämliche Lage, die vorher ξ einnahm.

Unterwirft man ferner nicht bloß ein, sondern zwei Systeme, z. B. S und S', der bezüglichen schiefsymmetrischen Transformation, und sind (vergl. Fig. 2) ξ und ξ' die zu x und x' symmetrischen Punkte, so sind ξ und ξ' in der Verwandtschaft $SS'S''$ einander zugeordnet und bilden zusammen mit x'' ein Tripel zugeordneter Punkte. Bezeichnet man also die durch die Transformationen erzeugten zwei neuen Systeme mit Σ und Σ', so ergibt sich, daß die Verwandtschaft $\Sigma\Sigma'S''$ identisch ist mit $SS'S''$. Durch die schiefsymmetrische Transformation *zweier* Systeme wird also eine Verwandtschaft nicht geändert.

Hieraus folgt weiter, daß auch die drei Verwandtschaften $\Sigma S'S''$, $S\Sigma'S''$, $SS'\Sigma''$ (von denen jede aus der andern durch Transformation zweier Systeme hervorgeht) identisch sind, das heißt: daß, um zu der Verwandtschaft $SS'S''$ mittels Transformation *eines* Systems die supplementäre zu erhalten, es gleichgültig ist, welches der drei Systeme transformiert wird.

Man erkennt ferner, daß zwei supplementäre Verwandtschaften identisch werden, sobald ein Kernwinkel ein *Rechter* ist. Denn in diesem Falle erleidet das System, dem dieser Kernwinkel angehört, durch die — nunmehr rechtwinklig-symmetrische — Transformation keine Formänderung.

Endlich gibt sich auf Grund dieser Betrachtungen ein charakteristischer Unterschied der zwei Verwandtschaftsformen hinsichtlich der gegenseitigen Lage von zwei Tripeln zugeordneter Punkte zu erkennen. Er bezieht sich darauf, ob die Punkte des einen Tripels innerhalb der von den Kernstrahlen des andern gebildeten spitzen Kernwinkel liegen oder innerhalb der stumpfen Kern-Nebenwinkel.

In der Fig. 2 gehören der Verwandtschaft $SS'S''$ die Punktetripel $aa'a''$, $xx'x''$ und $\xi\xi'x''$ an. Die Systeme befinden sich in orientierter Lage im engeren Sinn mit den Grundschnitten $\mathfrak{g}_{01}$, $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{20}$. Der zu ihr supplementären Verwandtschaft dagegen gehören die Tripel $aa'a''$, $\xi\xi'\xi''$ und $xx'\xi''$ an. Diese Systeme befinden sich in orientierter Lage im weiteren Sinn mit den Grundschnitten $\mathfrak{g}_{01}$, $\mathfrak{g}_{12}$, γ_{20}. (Der Grundschnitt γ_{20} ergibt sich als Verbindungslinie der Schnittpunkte der gegnerischen Kernstrahlen von a'' und a, ξ'' und ξ.)

Vergleicht man nun in jeder dieser Verwandtschaften die Lage der zwei zuletztgenannten Tripel in Beziehung zu dem erstgenannten Tripel $aa'a''$, so ergibt sich folgendes:

A) In der ersten Verwandtschaft liegen die Punkte des einen Tripels entweder *alle drei außerhalb der spitzen Kernwinkel* der Punkte des andern Tripels (so: die Tripel $xx'x''$ und $aa'a''$), oder *einer* außerhalb, die zwei anderen innerhalb (so: $\xi\xi'x''$ und $aa'a''$).

B) In der zweiten Verwandtschaft liegen die Punkte des einen Tripels entweder *alle drei innerhalb der spitzen Kernwinkel* der Punkte des andern Tripels (so: die Tripel $\xi\xi'\xi''$ und $aa'a''$), oder *einer* innerhalb, die zwei anderen außerhalb (so: $xx'\xi''$ und $aa'a''$).

Wir bezeichnen den ersten Typus als den *Typus A* oder den *stumpfwinkligen Typus,* den zweiten als den *Typus B* oder den *spitzwinkligen Typus.*

Man überzeugt sich leicht, daß die für die zwei Typen angegebenen Merkmale stets zutreffen, wie auch die zum Vergleich herangezogenen zwei Punktetripel liegen mögen. Es wird dies dadurch gewährleistet, daß, wenn man die Lage eines Tripels in Beziehung zu einem zweiten stetig ändert, ein Übertritt aus dem Innern eines spitzen Kernwinkels nach außen oder umgekehrt immer nur von 2 Punkten gleichzeitig erfolgen kann.

Die Bestimmung der Verwandtschaft durch die drei Kernwinkel und die drei Kernbüschelverhältnisse bedingt eine Zweideutigkeit, die sich durch die ganze Theorie geltend macht und leicht zu Trugschlüssen führen kann, falls man nicht den Typenunterschied scharf im Auge behält.

Die Entscheidung darüber, welchem Typus eine vorliegende Verwandtschaft angehört, macht sich bei ebener Orientierung im engeren Sinn sehr einfach. Da im Scheitelpunkt ein Punktetripel vereinigt ist, so hat man nur zu prüfen, ob der Scheitelpunkt außerhalb oder innerhalb der spitzen Kernwinkel dreier zugeordneten Punkte liegt.

§ 4.

Räumliche Orientierung und Objektivierung.

Räumlich orientiert nennen wir die drei Systeme, wenn sie im Raume so liegen, daß ihre Ebenen sich nach drei geraden Linien schneiden, in bezug auf welche die drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel perspektiv sind. Die drei Schnittlinien oder Perspektivitätsachsen werden wieder als *Grundschnitte* bezeichnet; sie schneiden sich im *Scheitelpunkt*, in dem ein Tripel zugeordneter Punkte vereinigt liegt.

Eine räumlich-orientierte Lage ist auf unendlich verschiedene Weise herstellbar. Jedes beliebige Tripel zugeordneter Punkte kann in den Scheitelpunkt verlegt werden. Ist dieses Tripel $a\,a'\,a''$ gewählt, so handelt es sich nur darum, jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel nach zwei kongruenten Punktreihen zu schneiden, die durch die Tripelpunkte gehen. Man vergl. hierzu Fig. 3, welche die drei Systeme zunächst in ebener Orientierung mit den Grundschnitten $\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{20}$ darstellt. Ist $x\,x'\,x''$ irgend ein zweites Punktetripel, so hat man, um z. B. die gegnerischen Kernstrahlenbüschel zwischen S und S' nach zwei kongruenten Punktreihen zu schneiden, die durch a und a' gehen, nur von a und a' nach den gegnerischen Kernstrahlen von x und x' zwei gleichlange Strecken $a\,k_{01} = a'\,k'_{01}$ zu legen und diese zu verlängern. In gleicher Weise legt man die Strecken $a'\,k'_{12} = a''\,k''_{12}$ und $a''\,k''_{20} = a\,k_{20}$ und verlängert sie.

Die Längen der drei Paare gleicher Strecken dürfen beliebig gewählt und können leicht so reguliert werden, daß die in jedem System von ihnen eingeschlossenen Winkel eine Summe kleiner als $4R$ bilden, und daß keiner dieser Winkel größer ist als die Summe der zwei anderen. Trifft dies zu, so kann aus den drei Winkeln als Seiten ein Dreikant zusammengesetzt werden, indem die drei Paare gleicher Strecken zu den Kanten $A\,K_{01}$, $A\,K_{12}$, $A\,K_{20}$ vereinigt werden. Damit ist die räumlich-orientierte Lage der drei Systeme hergestellt. Wir nennen das Dreikant: *Orientierungsdreikant.* Fig. 4 stelle eine ebene Abbildung desselben (in vergrößertem Maßstabe) vor. Seine Kanten bilden die Grundschnitte und mögen durch $\mathfrak{k}_{01}, \mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{20}$ bezeichnet werden; je zwei gegnerische Kernstrahlen des Punktetripels $x\,x'\,x''$ schneiden sich auf ihnen in den Punkten K_{01}, K_{12}, K_{20}.

Legt man nun durch je zwei gegnerische Kernstrahlen des Tripels $x\,x'\,x''$ eine Ebene, so schneiden sich diese drei Ebenen — wir nennen sie *Kernebenen* — nach drei geraden Linien $x\,X$, $x'\,X$, $x''\,X$, die in einem Punkt X zusammentreffen. — Führt man dies für eine größere Zahl von Punktetripeln $x\,x'\,x''$ aus, so sind die gleichartigen Kernebenen, da sie durch parallele Kernstrahlenpaare gehen, je unter sich parallel; daher sind auch die Schnittlinien $x\,X$ alle unter sich parallel, desgleichen die Schnittlinien $x'\,X$ und $x''\,X$. Man kann demnach die drei ebenen Systeme von Punkten x, x', x'' ansehen als verschiedene Parallelprojektionen des räumlichen Systems von Punkten X. Somit ist der Satz bewiesen:

Drei parallelprojektiv-trilineare Systeme (nach der Definition des § 1*)*

können stets, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in eine solche Lage im Raum gebracht werden, in der sie sich als verschiedene Parallelprojektionen eines und desselben räumlichen Systems darstellen.

In solcher räumlichen Orientierung erscheinen dann drei zugeordnete ähnliche Punktreihen als die Parallelprojektionen der nämlichen Punktreihe im Raum. — Die verschiedenen in den drei Systemen enthaltenen Tripel von zugeordneten affinen Systemen (vergl. § 2) erweisen sich als die Parallelprojektionen der in den verschiedenen Ebenen des Raumes enthaltenen ebenen Systeme. Ihre Anzahl ist demnach ∞^3. Ist die betreffende Ebene parallel zu einer projizierenden Richtung, so projizieren sich ihre Punkte auf die zugehörige Projektionsebene als Punkte einer geraden Linie, — auf die zwei anderen Projektionsebenen als entsprechende Punkte zweier affinen Systeme (vergl. § 2). — Von zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln stellt jedes die Projektion des der Ebene des anderen zugehörigen projizierenden Strahlenbündels vor.

Betreffs der Herstellung einer räumlich-orientierten Lage sind noch folgende Bemerkungen nachzutragen:

Geht man, wie oben geschehen, von einer ebenen Orientierung im engeren Sinn aus, so erhält man aus ihr eine räumliche Orientierung *am einfachsten* dadurch, daß man (vergl. Fig. 3) den Scheitelpunkt O und zwei Grundschnitte, z. B. $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{20}$, beibehält und das dem dritten Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ zugehörige gegnerische Kernbüschelpaar nach zwei durch O gehenden kongruenten Punktreihen $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ schneidet. Man erhält damit das ebene Netz des betreffenden Orientierungsdreikants; die Linien $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ stellen die Umlegungen der aufgeschnittenen dritten Kante $\mathfrak{h}_{12}$ in die Ebene S vor.

Umgekehrt gilt: Hat man ein räumliches Gebilde auf drei Ebenen im Raum parallelprojiziert und legt, wie dies in der Darstellenden Geometrie üblich ist, behufs Herstellung der Zeichenebene zwei Projektionsebenen in die dritte um, so befinden sich die drei Projektionen in der Zeichenebene stets in ebener Orientierung im engeren Sinn; denn im Scheitelpunkt liegt ein Tripel zugeordneter Punkte vereinigt. (Zur Veranschaulichung mag etwa Fig. 17 dienen, welche Aufriß und Seitenriß in die Ebene des Grundrisses umgelegt zeigt; $\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{20}$ stellen die drei Grundschnitte der ebenen Orientierung vor, $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ die Umlegungen des aufgeschnittenen dritten Grundschnitts $\mathfrak{h}_{12}$ der räumlichen Orientierung.)

Auch mit *parallelen* Grundschnitten läßt sich eine räumliche Orientierung bewerkstelligen. Eine einfache Überlegung zeigt, daß in diesem Falle die

bezeichnen. In der Theorie der trilinearen Verwandtschaft kommt jedoch mehr die umgekehrte Operation in Betracht: Hier sind die ebenen Systeme das ursprünglich Gegebene; sie werden mittels verschiedenartiger Orientierung einer veränderlichen Objektivierung unterzogen. Diesen für die trilineare Verwandtschaft charakteristischen Übergang von den Projektionen zum Objekt wollen wir im Gegensatz zum Projizierungsprozeß als *Objizierungsprozeß* bezeichnen. Entsprechend nennen wir die von den Systempunkten nach dem Objektpunkt führenden Linien xX, $x'X$, $x''X$: *objizierende Strahlen.* Sie unterscheiden sich von den projizierenden Strahlen lediglich durch den Richtungssinn.*)

Die objizierenden Strahlen wurden in § 4 zunächst als Schnittlinien der drei Kernebenen erhalten. Ihre Bestimmung kann aber auch durch eine einfache *Linienkonstruktion* erfolgen. Die Möglichkeit hierfür ist dadurch bedingt, daß die Kernebenen durch ihre Spurlinien in den Flächen des Orientierungsdreikants deskriptiv bestimmt sind.**)

Eine solche Linienkonstruktion ergibt sich z. B. aus der *Hexaederkonfiguration* $(20_3, 15_4)$, die von den 15 Schnittlinien und 20 Schnittpunkten der drei Systemebenen und der drei Kernebenen des Punktetripels $x\,x'\,x''$ gebildet wird: Das Orientierungsdreikant wird von den drei Kernebenen nach drei Dreiecken geschnitten. Zwei Seiten eines solchen Dreiecks (vergl. z. B. in Fig. 4 das Schnittdreieck $K_{01}\,u_{12}\,u_{20}$ der durch $K_{01}\,x$ und $K_{01}\,x'$ gelegten Kernebene) fallen mit zwei gegnerischen Kernstrahlen zusammen; bringt man diese mit den zwei anderen Grundschnitten zum Schnitt und verbindet die Schnittpunkte, so ergibt sich die dritte Seite. Nun schneiden sich die 3 mal 3 Seiten der drei Dreiecke in 3 mal 3 Punkten, welche zu je dreien in 3 geraden Linien liegen, die in *einem* Punkte zusammentreffen und die objizierenden Strahlen vorstellen. In Fig. 4 ist die Bestimmung der objizierenden Strahlen $x\,X$ und $x'\,X$ nach diesem Verfahren durch unterbrochene Linien angedeutet.

Ein *zweites* Verfahren besteht darin, daß man sich das von den drei Systemebenen und den drei Kernebenen gebildete Hexaeder durch eine beliebige Hilfsebene geschnitten denkt und das Schnittsechseck zeichnet. Die

*) In den Figuren sind die objizierenden bezw. projizierenden Strahlen durchweg als solche durch *strich-punktierte* Linien charakterisiert. Die Kernstrahlen sind *kleingestrichelt.*

**) Bei einer Orientierung mit zusammenfallenden Grundschnitten ist die Möglichkeit nicht vorhanden.

Orientierung affin-verwandt. Ebenso sind die bei zwei verschiedenen ebenen Orientierungen sich ergebenden ebenen Objektgebilde zu einander affin im Sinne der *räumlichen* Affinitätsverwandtschaft.

Zur Veranschaulichung dieser ebenen Objektivierung mag Fig. 14α dienen, in welcher die drei Systeme S, S', S'' (Grundriß, Aufriß, Seitenriß) sich in beliebiger ebener Orientierung befinden mit den Grundschnitten $\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{20}$. Es wurden dann die Objizierungsrichtungen $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}''$ mittels des (in der Figur durch punktierte Linien angedeuteten) zweiten Konstruktionsverfahrens bestimmt, worauf sich das Objekt R als Schnittfigur der drei durch die zugeordneten Punkte von S, S', S'' gelegten objizierenden Strahlenbüschel ergab.

Man kann die resultierende Objektfigur R etwa als die *Resultante*, die Figuren S, S', S'' als ihre drei *Komponenten* bezeichnen. Zwischen denselben bestehen interessante Beziehungen. Je zwei Komponenten, z. B. S und S', bilden zusammen mit der Resultanten R wieder drei parallelprojektiv-trilineare Systeme in ebener Orientierung. Die gegnerischen Kernstrahlenbüschel zwischen S und R, desgleichen zwischen S' und R sind kongruent und zusammenfallend. Als zugehörige Grundschnitte können irgend zwei durch einen Punkt von $\mathfrak{g}_{01}$ gezogene Linien genommen werden. Wählt man sie mit $\mathfrak{g}_{01}$ zusammenfallend, so erscheinen die drei Systeme in ebener Orientierung mit zusammenfallenden Grundschnitten. Versucht man, die drei Systeme für sich wieder zu objektivieren, so erhält man eine Resultante, die mit R zusammenfällt. Auf weitere Beziehungen werden wir später (§ 16) zurückkommen.

Wir können das Verfahren des Objektivierens bei ebener Orientierung in Beziehung setzen zur Methode der *Axonometrie*. Diese besteht darin, daß man die Objektpunkte X auf ein Kartesisches Koordinatensystem bezieht, die Koordinatenachsen abbildet und für jeden Punkt X das Bild seines projizierenden Parallelepipeds einzeichnet. Nun stellen von den Ecken dieses Parallelepipeds drei die Projektionen x, x', x'' des Punktes X auf die drei Koordinatenebenen vor; die drei Kanten xX, $x'X$, $x''X$ können als objizierende Strahlen bezeichnet werden. Es werden also tatsächlich die Bilder der Projektionen des Objektes gezeichnet und diese dann mittels der Bilder der objizierenden Strahlen zum axonometrischen Bilde zusammengesetzt. Dies ist der nämliche Vorgang wie bei unserem Objektivierungsverfahren, nur mit der Besonderheit, daß die Objizierungsrichtungen und die Kernrichtungen

parallel zu den Grundschnitten oder Koordinatenachsen sind. Unser Verfahren stellt demgegenüber eine Verallgemeinerung dar, die zwar zunächst eine Komplikation bedeutet, aber andererseits auch eine Vereinfachung bedingt. Denn während bei der axonometrischen Methode die *Bilder* der Projektionen verwendet werden, gestattet die ebene Orientierung bei der trilinearen Methode, mit den Projektionen selbst in wahrer Gestalt zu arbeiten. So liefert z. B. Fig. 14α das orthogonal-axonometrische Bild unmittelbar aus zwei Rissen in wahrer Gestalt. (Vergl. § 16 und § 18.)

Die Objektivierung bei ebener Orientierung bildet ein wichtiges Prinzip für die konstruktive Behandlung der trilinearen Verwandtschaft. Bei seiner Anwendung ist stets darauf zu achten, daß, wenngleich die Figuren planimetrisch sind, man sich dieselben doch dreidimensional vorzustellen und die verschiedenen Ebenen, in denen die einzelnen Punkte zu denken sind, scharf auseinanderzuhalten hat.

Einige einfache Beispiele mögen dies veranschaulichen:

1. Fällt für ein Tripel zugeordneter Punkte der Objektpunkt X mit einem Tripelpunkt, z. B. x, zusammen, so liegt der Punkt X in der betreffenden Systemebene S. Durch $[x, X]$ sind die zwei anderen Tripelpunkte x' und x'' vollständig bestimmt. Um z. B. x' zu erhalten, zieht man (vergl. Fig. 5) durch $[x, X]$ den Kernstrahl $\mathfrak{q}$, zieht seinen gegnerischen Kernstrahl $\mathfrak{p}'$ und projiziert auf ihn den Punkt $[x, X]$ parallel mit der Richtung $\mathfrak{r}'$ nach x'. Oder, wie wir kurz sagen: man *projiziert* den Punkt $[x, X]$ auf die Systemebene S' nach x'.

2. Umgekehrt ist ein in S liegender Objektpunkt $[x, X]$ durch eine seiner Projektionen, z. B. x', bestimmt. Um ihn zu erhalten, zieht man (vergl. Fig. 5) durch x' den Kernstrahl $\mathfrak{p}'$, zieht seinen gegnerischen Kernstrahl $\mathfrak{q}$ und objiziert auf diesen den Punkt x' parallel mit $\mathfrak{r}'$ nach $[x, X]$. Oder, wie wir kurz sagen: man *objiziert* den Punkt x' auf die Systemebene S nach $[x, X]$.

3. Hat man im System S' eine gerade Linie $\mathfrak{l}'$ (vergl. Fig. 5), die auf die Systemebene S objiziert werden soll, so bemerke man, daß $\mathfrak{l}'$ und ihre Objektion sich auf dem betreffenden Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ schneiden müssen. Wird daher $\mathfrak{g}_{01}$ von $\mathfrak{l}'$ im Punkt t' geschnitten, so objiziert man (nach 2) einen beliebigen Punkt x' von $\mathfrak{l}'$ auf die Ebene S nach $[x, X]$ und verbindet $[x, X]$ mit t'. — Die Objektion $t'[x, X]$ bildet die Spurlinie der objizierenden Ebene von $\mathfrak{l}'$ in der Systemebene S.

4. Die Punkte, in denen drei zugeordnete Gerade $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ von ihrer Objektgeraden $\mathfrak{L}$ geschnitten werden, liegen in den betreffenden Systemebenen und stellen die drei Spurpunkte von $\mathfrak{L}$ vor. In drei eben-orientierten Systemen liegen also die Spurpunkte dreier zugeordneten Geraden stets in gerader Linie.

5. Sind von einer Objektgeraden $\mathfrak{L}$ (vergl. Fig. 5) zwei ihrer Spurpunkte, z. B. $[v, V]$ in S und $[w', W]$ in S' gegeben, so erhält man die zugehörigen Projektionen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, indem man (nach 1) den Punkt $[v, V]$ auf die Systemebene S' nach v' —, den Punkt $[w', W]$ auf die Systemebene S nach w projiziert und die Projektionen v' und w bezw. mit $[w', W]$ und $[v, V]$ verbindet.

6. Umgekehrt: Objiziert man (nach 3) von zwei zugeordneten Geraden $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ (vgl. Fig. 5) die eine $\mathfrak{l}'$ auf S nach $\mathfrak{t}'[x, X]$, die andere $\mathfrak{l}$ auf S' nach $\mathfrak{u}[y', Y]$, so schneiden die Objektionen die Geraden $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ in ihren Spurpunkten. Hiernach Bestimmung der drei Spurpunkte eines Geradentripels.

7. Die drei Spurlinien einer Ebene schneiden sich zu je zweien auf den drei Grundschnitten. Ist $x\,x'\,x''$ ein Punktetripel, dessen zugehöriger Objektpunkt X in einer durch ihre Spurlinien gegebenen Ebene liegen soll, so muß, wenn man die Schnittlinie der Ebene mit einer Kernebene des Punktetripels bestimmt, der Punkt X auf dieser liegen. Die Schnittlinie ergibt sich dadurch, daß man die in der Kernebene liegenden zwei gegnerischen Kernstrahlen mit den entsprechenden Spurlinien der Ebene zum Schnitt bringt und die Schnittpunkte verbindet. Hiernach Ermittelung der zwei anderen Tripelpunkte, wenn einer gegeben ist.

8. $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ sei ein Geradentripel. Es soll das auf ihm liegende Punktetripel $x\,x'\,x''$ gefunden werden, dessen Objektpunkt X den Schnittpunkt der Objektgeraden $\mathfrak{L}$ mit einer durch ihre Spurlinien gegebenen Ebene vorstellt: Man bestimmt die Schnittlinie der Ebene mit einer objizierenden Ebene des Geradentripels, z. B. mit derjenigen von $\mathfrak{l}$, indem man $\mathfrak{l}$ (nach 3) auf S' objiziert, die Objektion und $\mathfrak{l}$ selbst mit den entsprechenden Spurlinien der Ebene zum Schnitt bringt und die Schnittpunkte verbindet. Die Verbindungslinie wird von der Objektgeraden $\mathfrak{L}$ im Objektpunkt X geschnitten, der — auf $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ projiziert — das gesuchte Punktetripel liefert.

Zu diesen Konstruktionen (deren weitere Verfolgung dem Leser überlassen bleiben mag) sei noch folgendes bemerkt:

§ 7.

Kongruente zugeordnete Punktreihen.

Auf einem Tripel zugeordneter Geraden bilden die zugeordneten Punkte ähnliche Punktreihen. Es fragt sich, ob es auch Geradentripel gibt, deren zugeordnete Punktreihen *kongruent* sind. Ist *ein* Geradentripel vorhanden, dem diese ausgezeichnete Eigenschaft zukommt, so gilt das Gleiche auch für alle Geradentripel, die zu jenem parallel sind; durch jedes Tripel zugeordneter Punkte $a\,a'\,a''$ geht dann ein solches „*ausgezeichnetes*“ Geradentripel.

Um dasselbe zu ermitteln, bringen wir die drei Systeme in ebene Orientierung, so daß das Punktetripel $a\,a'\,a''$ im Scheitelpunkt A vereinigt liegt (vergl. Fig. 6α). $x\,x'\,x''$ sei irgend ein anderes Tripel zugeordneter Punkte, seine gegnerischen Kernstrahlenpaare schneiden sich auf den Grundschnitten $\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{20}$ in den Punkten G_{01}, G_{12}, G_{20}. Durch eine der Linienkonstruktionen des § 5 werden die objizierenden Strahlen $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}''$ bestimmt, welche sich im Objektpunkt X schneiden.

Wir suchen nun zunächst in *zwei* Systemen, z. B. S und S', zwei gerade Linien durch A von der Eigenschaft, daß ihre zugeordneten Punktreihen kongruent sind. Hierfür genügt, daß, wenn b, b' zwei zugeordnete Punkte auf ihnen sind, $Ab = Ab'$ ist. Durchschneidet man also die zwei gegnerischen Kernstrahlen $G_{01}x$ und $G_{01}x'$ mit einem Kreis aus A von beliebigem Halbmesser in den Punkten b und b', so sind Ab und Ab' zwei gerade Linien von der verlangten Beschaffenheit. Bestimmt man zu b und b' mittels der objizierenden Strahlen den zugehörigen Objektpunkt B und zieht AB, so stellt AB eine Objektgerade vor, die sich auf S und S' mit kongruenten Punktreihen projiziert.

Solcher besonderen Objektgeraden sind durch A unendlich viele vorhanden; sie bilden eine (unendlich dünne) Kegelfläche zweiter Ordnung. Stellt man sich nämlich eine ganze Reihe von Punkten B nach der angegebenen Konstruktion her, indem man die Kernstrahlen $G_{01}x$ und $G_{01}x'$ durch ein System von konzentrischen Kreisen aus A durchschneidet, so ergibt sich als geometrischer Ort für die Punkte B eine durch G_{01} gehende Hyperbel. Dies läßt sich leicht wie folgt beweisen:

Man kann die ganze Figur darstellend-geometrisch deuten als die Grundrißprojektion einer Kugel mit Mittelpunkt A (vergl. Fig. 6β, welche

eine Wiederholung der Fig. 6α unter Weglassung der belanglosen Linien vorstellt). Ihr Umrißkreis K kann beliebig gewählt werden. Wird dieser von den zwei Kernstrahlen $G_{01}x$ und $G_{01}x'$ in t und u, bezw. v' und w' geschnitten, so können die zwei Strecken tu und $v'w'$ aufgefaßt werden als Projektionen zweier Kugelkreise in vertikaler Stellung, welche die Leitlinien von zwei horizontalen Zylindern bilden, deren Mantellinien parallel zu den Objizierungsrichtungen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ sind. Die konzentrischen Kreise aus A stellen dann die Projektionen von Parallelkreisen der Kugel vor, und für jeden derselben bedeuten die Linien bB und $b'B$ je eine der zwei in seiner Ebene liegenden Mantellinien jedes Zylinders. Die Kurve der Punkte B bildet somit die Grundrißprojektion der Durchdringungskurve der zwei Zylinder. Sie ist an und für sich von der vierten Ordnung. Da aber die Zylinder die horizontale Ebene durch den Kugelmittelpunkt als Symmetralebene haben, so fallen die Projektionen von je zwei symmetrisch liegenden Punkten der Durchdringungskurve in der Projektion zusammen. Die Kurve der Punkte B degeneriert somit zu einem Kegelschnitt, und zwar zu einer (durch G_{01} gehenden) Hyperbel.*)

Nun liegen die Punktepaare b, b' (vergl. Fig. 6α) alle auf den zwei durch G_{01} gehenden Kernstrahlen. Daher liegen die Objektpunkte B alle in der durch diese gehenden Kernebene γ_{01}. Die Hyperbel stellt also die Schnittkurve der Kernebene γ_{01} mit der von den Objektgeraden AB gebildeten Kegelfläche vor; diese letztere ist folglich von der zweiten Ordnung.

Da die Objektgebilde, die bei verschiedenartiger Orientierung erhalten werden, zu einander affin sind, so muß sich auch bei räumlicher Orientierung

*) Die durch die Mitten von tu und $v'w'$ parallel zu $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ gezogenen Linien stellen ein Paar konjugierter Durchmesser vor; denn sie halbieren die Gegenseiten der Parallelogramme, deren Ecken von je vier in der nämlichen Parallelkreisebene liegenden Kurvenpunkten gebildet werden. Macht der Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ mit tu einen größeren Winkel als mit $v'w'$, so ist der Parallelkreis, der tu berührt, der letzte, der noch Kurvenpunkte liefert, und zwar die Endpunkte des reellen Durchmessers; der durch die Mitte von $v'w'$ gehende Durchmesser ist imaginär. — Macht $\mathfrak{g}_{01}$ gleiche Winkel mit tu und $v'w'$ (was der Fall ist, wenn die zwei gegnerischen Kernstrahlenbüschel kongruent sind), so degeneriert die Hyperbel zu einem Geradenpaar. — Hinsichtlich des angewendeten Beweisverfahrens ist übrigens zu bemerken, daß statt der Kugel auch jede beliebige andere Umdrehungsfläche hätte supponiert werden können: Die Durchdringungskurve zweier Zylinder, die zwei zur Achse parallele ebene Schnitte einer Umdrehungsfläche zu Leitlinien haben, und deren Mantellinien zur Achse rechtwinklig sind, projiziert sich parallel zur Achse stets als Hyperbel.

als Ort der Objektpunkte B eine Hyperbel ergeben. Wir haben somit den Satz:

Unterzieht man ein räumliches System einer zweifachen Parallelprojektion, so ist der geometrische Ort aller durch einen bestimmten Raumpunkt gehenden Geraden von der Eigenschaft, daß sie sich beiderseits mit kongruenten Punktreihen projizieren, eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Wendet man den Satz — wie vorhin auf die Systemebenen S und S' — so jetzt auf S' und S'' an, so erhält man als Ort der Geraden durch A, die sich auf S' und S'' mit kongruenten Punktreihen projizieren, eine zweite Kegelfläche zweiter Ordnung.

Beide Kegel schneiden sich nach 4 Geraden, welchen die ausgezeichnete Eigenschaft zukommt, daß sie sich auf alle drei Systemebenen mit unter sich kongruenten Punktreihen projizieren.

Um die 4 Schnittgeraden konstruktiv zu erhalten, hat man die Schnittkurven beider Kegel mit einer und derselben Ebene zu konstruieren und deren vier Schnittpunkte zu bestimmen. Dies geschieht wie folgt: Wählt man als Schnittebene die Kernebene γ_{12} durch den Punkt G_{12} (vergl. Fig. 6α), so ist deren Schnittkurve mit dem zweiten Kegel (welcher den geometrischen Ort in Bezug auf S' und S'' bildet) eine Hyperbel, die genau auf die nämliche Weise konstruiert wird, wie es oben hinsichtlich der in der Ebene γ_{01} liegenden Hyperbel gezeigt wurde. Um ferner die Schnittkurve mit dem ersten Kegel (welcher den geometrischen Ort in Bezug auf S und S' bildet) zu erhalten, bemerke man (vergl. Fig. 6α): Ist C der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Ebene γ_{12}, so muß seine Projektion c' auf die Systemebene S' einerseits auf der Linie Ab', andererseits auf dem Kernstrahl $G_{12}x'$ liegen und ergibt sich also als Schnittpunkt beider. Demnach hat man folgende Konstruktion: Man bestimmt die Punkte b und b' nebst ihrem Objektpunkt B wie zuvor, zieht AB und Ab', bringt Ab' zum Schnitt mit dem Kernstrahl $G_{12}x'$ und objiziert den Schnittpunkt c' auf AB nach C. Führt man dies mit Bezug auf das ganze System von konzentrischen Kreisen aus, so erhält man als geometrischen Ort der Punkte C einen Kegelschnitt, welcher die gesuchte Schnittkurve vorstellt. — Die zwei konstruierten Schnittkurven schneiden sich nun in 4 Punkten, deren Verbindungslinien mit A die vier Schnittmantellinien der zwei Kegel liefern. Projiziert man die vier Kurvenschnittpunkte auf die zwei Kernstrahlen durch G_{12} und bestimmt die dritten zugeordneten Punkte im System S, so hat man vier

Punktetripel, deren Verbindungslinien mit A die Projektionen der vier Schnittmantellinien bilden und demgemäß die vier möglichen „ausgezeichneten" Geradentripel durch das Punktetripel $a\,a'\,a''$ vorstellen.

Es gibt somit *vier ausgezeichnete Tripel von zugeordneten Richtungen*, denen die Eigenschaft zukommt, daß auf den mit ihnen parallelen Geradentripeln die zugeordneten Punkte kongruente Punktreihen bilden.

Betreffs unseres Konstruktionsverfahrens sei schließlich, anknüpfend an die Schlußbetrachtung von § 6, noch folgendes erwähnt: In der ganzen Konstruktion kommen nur Punkte in Betracht, die in Bezug auf die Orientierung invariant sind. Daher wäre die Benutzung der Objektivierungsmethode nicht unbedingt erforderlich gewesen. In der Tat hätte man auch in folgender Weise verfahren können: Die zwei Schnittkurven der zwei Kegel mit der Kernebene γ_{12} projizieren sich in die Systemebenen S' und S'' als die Geraden $G_{12}x'$ und $G_{12}x''$, dagegen in die Ebene S als Kurven. Bestimmt man daher zu den Schnittpunkten der konzentrischen Kreise mit jenen zwei Geraden mittels je zweier gegnerischen Kernstrahlenpaare die dritten zugeordneten Punkte im System S, ferner zu den Punkten c' mittels je eines gegnerischen Kernstrahlenpaares die zugeordneten Punkte c auf Ab, so erhält man in S die zwei Kurvenprojektionen und kann dann zu deren vier Schnittpunkten die auf den Geraden $G_{12}x'$ und $G_{12}x''$ liegenden zugeordneten Punkte wieder durch Vermittelung je zweier gegnerischen Kernstrahlenpaare bestimmen. — Die Vergleichung dieser modifizierten Konstruktion mit unserer ursprünglichen ergibt, daß an die Stelle jedes *einfachen* objizierenden Strahles *zwei* Kernstrahlen treten. Dadurch ist die durch die Benutzung des Objektivierungsverfahrens erzielte Vereinfachung gekennzeichnet.

§ 8.

Zugeordnete Strahlenbüschel.

Betreffs besonderer Tripel von zugeordneten Geraden bezw. Richtungen sind des weiteren folgende leicht zu überschauende Fälle namhaft zu machen:

Fällt von drei zugeordneten Geraden die eine mit einem Kernstrahl, z. B. $\mathfrak{q}$, zusammen, so muß eine zweite im allgemeinen in den gegnerischen Kernstrahl $\mathfrak{p}'$ fallen; die dritte wird dann unbestimmt. Die zugehörige Objektgerade ist ebenfalls unbestimmt, ihre Lage ist aber auf die durch die zwei ersten Geraden gehende Kernebene γ_{01} beschränkt.

Fällt die erste Gerade wieder mit einem Kernstrahl, z. B. $\mathfrak{q}$, zusammen, und wird ihr im dritten System der korrespondierende Kernstrahl $\mathfrak{p}''$ zugeordnet, so reduziert sich die zweite Gerade auf einen Punkt. Als Objektgerade erscheint der durch diesen Punkt gehende objizierende Strahl.

Befinden sich die drei Systeme in ebener Orientierung, und sind von drei zugeordneten Geraden zwei parallel den zugehörigen objizierenden Richtungen, so muß auch die dritte Gerade parallel der dritten objizierenden Richtung sein und muß mit den zwei ersten im nämlichen Punkt zusammentreffen. Die zugehörige Objektgerade reduziert sich auf diesen Punkt. Doch sind in ihm im allgemeinen nicht etwa drei zugeordnete Punkte vereinigt.

Die drei objizierenden Richtungen einer ebenen Orientierung bilden also für die drei Systeme ein Tripel zugeordneter Richtungen. Indessen spielt dieses keine bevorzugte Rolle für die Verwandtschaft selbst, sondern hat seine Bedeutung nur mit Rücksicht auf die betreffende Art der ebenen Orientierung. Für jedes Tripel zugeordneter Richtungen gibt es eine bestimmte Anordnung der ebenen Orientierung, bei der es als objizierendes Richtungstripel erscheint.

Die Gesamtheit aller Geradentripel, die durch ein bestimmtes Punktetripel $a\,a'\,a''$ gehen, bildet drei *zugeordnete Strahlenbüschel*, deren räumliche Objektivierung ein räumliches Strahlenbündel ist. Drei solche Strahlenbüschel stehen in der nämlichen allgemein-trilinearen Beziehung wie in der zentralprojektiv-trilinearen Verwandtschaft.*) Während aber dort die *Charakteristik* für verschiedene Tripel zugeordneter Büschel verschiedene Werte besitzt, ist sie bei der parallelprojektiven Verwandtschaft für sämtliche Tripel konstant.

Denn sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$; $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}'$; $\mathfrak{p}'', \mathfrak{q}''$ die den drei Zentren a, a', a'' zugehörigen Kernstrahlen, $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}''$ irgend drei zugeordnete Strahlen, und bezeichnet man die Abstände dreier auf $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}''$ liegenden zugeordneten Punkte x, x', x'' von den genannten Kernstrahlen durch p, q; p', q'; p'', q'', so ist (vergl. § 1):

$$\frac{\sin(\mathfrak{p},\mathfrak{r})}{\sin(\mathfrak{r},\mathfrak{q})}\,\frac{\sin(\mathfrak{p}',\mathfrak{r}')}{\sin(\mathfrak{r}',\mathfrak{q}')}\,\frac{\sin(\mathfrak{p}'',\mathfrak{r}'')}{\sin(\mathfrak{r}'',\mathfrak{q}'')} = \frac{p}{q}\,\frac{p'}{q'}\,\frac{p''}{q''} \tag{1.}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_{01}\,\varepsilon_{12}\,\varepsilon_{20}}.$$

*) Vergl. „Theorie der trilinearen Verwandtschaft, IV. Art.", § 5 und § 12. (Dieses Journal, Bd. 108, S. 33 und S. 46.) — Auf diese Abhandlung wird im folgenden noch mehrfach verwiesen werden unter der kurzen Bezeichnung: „IV. Art."

Dies ist aber die Grundrelation für die allgemein-trilineare Beziehung von Strahlenbüscheln, wie sie a. a. O. (IV. Art., § 5, Gleichung 7) aufgestellt wurde. Die Charakteristik hat den konstanten Wert $\frac{1}{\varepsilon_{01}\,\varepsilon_{12}\,\varepsilon_{20}}$.

Die Unveränderlichkeit der Charakteristik ist durch den Umstand bedingt, daß in zwei Tripeln zugeordneter Büschel zu je drei zugeordneten Strahlen des einen Tripels drei parallele zugeordnete Strahlen des anderen vorhanden sind; die drei Büschel des einen Tripels können somit als Parallelverschiebungen der drei Büschel des anderen angesehen werden.

Die konstruktive Bestimmung von zugeordneten Strahlen in drei zugeordneten Strahlenbüscheln a, a', a'' kann dadurch bewirkt werden, daß man drei zugeordnete Punkte x, x', x'' bestimmt und diese mit a, a', a'' verbindet. Bei ebener Orientierung der drei Systeme läßt sich aber auch eine direkte Strahlenkonstruktion ausführen, und zwar durch Vermittelung von drei Hilfsstrahlenbüscheln, die zu den Büscheln a, a', a'' perspektiv liegen und zu einander in der speziellen Beziehung stehen, daß je drei Strahlen, die sich im nämlichen Punkte schneiden, einander zugeordnet sind. Wir haben diese Beziehung bereits im vorerwähnten IV. Art., § 6 aufgeführt und als *Ceva-Beziehung besonderer Art* gekennzeichnet. — Solche drei Hilfsstrahlenbüschel bieten sich hier ganz von selbst dar: Zieht man nämlich (vergl. Fig. 7) durch die drei Zentren a, a', a'' die objizierenden Strahlen, die sich im Objektpunkt A schneiden, so bilden diese drei zugeordnete Strahlen. Wählt man auf ihnen drei beliebige Punkte n, n', n'', zieht ihre Verbindungslinien, markiert deren Schnittpunkte q, p'; q', p''; q'', p mit je zwei gegnerischen Kernstrahlen des Punktetripels $a\,a'\,a''$, und verbindet von diesen je zwei in der nämlichen Systemebene liegende (p und q, p' und q', p'' und q''), so bilden die Punkte n, n', n'' die Zentren von drei besonderen *Ceva*-Büscheln, die mit den drei Büscheln a, a', a'' perspektiv liegen mit Bezug auf die Linien $pq, p'q', p''q''$ als Perspektivitätsachsen. Um also zu zwei beliebigen Strahlen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ der Büschel a und a' den dritten zugeordneten $\mathfrak{x}''$ des Büschels a'' zu bestimmen, bringt man $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ zum Schnitt mit den Achsen pq und $p'q'$, zieht nach den Schnittpunkten Strahlen aus n und n', und nach deren Schnittpunkt einen Strahl aus n''; bringt man diesen zum Schnitt mit der Achse $p''q''$ und verbindet den Schnittpunkt mit a'', so stellt die Verbindungslinie den dritten zugeordneten Strahl $\mathfrak{x}''$ vor.

Diese Konstruktion gestaltet sich in der praktischen Anwendung in-

sofern sehr einfach, als der Apparat der drei Hilfsstrahlenbüschel nur für ein einziges Punktetripel $a\,a'\,a''$ anzubringen ist, und dazu die bereits vorhandene Konstruktionsfigur, die zur Bestimmung der Objizierungsrichtungen gezeichnet wurde (vergl. Fig. 4), benutzt werden kann. Von dem Tripel $a\,a'\,a''$ können dann die zugeordneten Geraden auf jedes andere Punktetripel durch Ziehen von Parallelen übertragen werden.

Eine weitere Beleuchtung wird die Konstruktion in § 19 (letzter Absatz) finden.

§ 9.

Bestimmung der Verwandtschaft durch 4 Punktetripel.

Sind von drei parallelprojektiv-trilinearen Systemen 4 Tripel zugeordneter Punkte gegeben, so sind dadurch die sechs Kernstrahlenbüschel bestimmt. Sie können auf folgende Weise ermittelt werden:

Die vier gegebenen Punktetripel seien $a\,a'\,a''$, $b\,b'\,b''$, $c\,c'\,c''$, $d\,d'\,d''$. Fig. 8 zeigt die drei Systeme so in eine Ebene gelegt, daß das Punktetripel $a\,a'\,a''$ im nämlichen Punkte A vereinigt ist; sie befinden sich also in ebener Orientierung. — Um nun z. B. die gegnerischen Kernrichtungen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$ zwischen den Systemen S und S' zu finden, verbinden wir in S je zwei Punkte, z. B. a und b, c und d, und ziehen in S' die entsprechenden Verbindungslinien $a'\,b'$ und $c'\,d'$. Im Kreuzungspunkt von ab und cd fällt ein Punkt r von ab mit einem Punkt s von cd zusammen. Sind r' und s' die diesen zugeordneten Punkte in S', so müssen, da die Kernstrahlen von r und s zusammenfallen, auch die ihnen entsprechenden gegnerischen Kernstrahlen zusammenfallen, das heißt: diese Kernstrahlen müssen mit der Linie $r'\,s'$ übereinstimmen. Die Punkte r' und s' lassen sich aber leicht ermitteln, da die Strecken $a'\,b'$ und $c'\,d'$ in den Punkten r' und s' nach den nämlichen Verhältnissen geteilt sein müssen wie ab und cd in den Punkten r und s. Bestimmt man also die Punkte r' und s' durch diese Teilung, so ist in der Verbindungslinie $r'\,s'$ die Kernrichtung $\mathfrak{p}'$ gefunden. — Die gegnerische Kernrichtung $\mathfrak{q}$ ergibt sich nach der nämlichen Schlußfolgerung, indem man die Strecken ab und cd nach denselben Verhältnissen teilt, nach denen $a'\,b'$ und $c'\,d'$ in ihrem Kreuzungspunkt $[t', u']$ geteilt erscheinen; die Verbindungslinie der Teilpunkte t, u ergibt die gesuchte Kernrichtung $\mathfrak{q}$. — Zieht man nun durch die Punkte a, b, c, d und a', b', c', d' Strahlen parallel

zu den gefundenen Richtungen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$, so bilden diese — zwei Parallelstrahlenbüschel, die zu einander ähnlich sind und durch ihren Schnitt den Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ bestimmen. Nach demselben Verfahren werden auch die gegnerischen Kernstrahlenbüschel zwischen den Systemen S' und S'', sowie zwischen S'' und S bestimmt, wie dies aus Fig. 8 des näheren ersichtlich ist.

Da die Verwandtschaft durch die drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel bestimmt ist, und diese letzteren aus 4 Punktetripeln ermittelt werden können, so haben wir den Satz:

Drei parallelprojektiv-trilineare ebene Systeme sind bestimmt durch 4 Tripel zugeordneter Punkte.

Betreffs der gegenseitigen Lage der vier Tripelpunkte in jedem System gilt die Beschränkung, daß nicht alle vier Punkte in gerader Linie liegen dürfen. Dagegen können wohl drei Punkte in gerader Linie liegen, wobei auch zwei Punkte zusammenfallen können; die angegebene Konstruktion bleibt auch dann immer ausführbar. — Sind die von den Tripelpunkten gebildeten drei Vierecke zu einander affin, so ist die Bestimmung eine unvollständige, insofern sie sich nur auf ein einziges Tripel von zugeordneten affinen Systemen erstreckt statt auf die vorhandenen unendlich vielen (vergl. § 2). — Der Fall, daß nur zwei Vierecke zu einander affin sind, führt zu einer gewissen Ausartung der Verwandtschaft, die in § 13 besprochen werden wird.

Unter den genannten Einschränkungen können wir unseren Satz gemäß den Ausführungen des § 4 auch so aussprechen:

Drei beliebige vollständige Vierecke (in denen auch drei Ecken in gerader Linie liegen oder zwei Ecken zusammenfallen dürfen) können stets als Parallelprojektionen eines und desselben Tetraeders angesehen werden.

Das Tetraeder wird durch die drei gegebenen Vierecke nicht vollständig bestimmt, sondern nur bis auf 3 willkürliche Größen, die durch die Art der Orientierung bedingt sind (vergl. § 4, letzter Absatz). Es gibt also ∞^3 Tetraederformen, als deren Projektionen drei beliebige Vierecke betrachtet werden können.

Die Zahl der willkürlichen Größen wird durch das Hinzutreten jedes weiteren Vierecks um 1 verringert. Denn die Forderung, daß ein vollständiges Viereck zu einem Tetraeder in parallelperspektive Lage gebracht werden kann, bedingt nach dem (allgemeinen) *Pohlke*schen Satz eine

Beziehungsgleichung zwischen den Bestimmungselementen des Tetraeders und des Vierecks.*) *Erst durch 6 Vierecke* ist also eine endliche Zahl von Tetraedern (reell oder imaginär) bestimmt, deren jedes als Objektivierung der sechs Vierecke gelten kann.

In drei durch vier Punktetripel gegebenen parallelprojektiv-trilinearen Systemen können übrigens die erforderlichen Konstruktionen ausgeführt werden auch ohne Benutzung der Kernstrahlen und ohne Vermittlung einer orientierten Lage, lediglich auf Grund der Ähnlichkeit zugeordneter Punktreihen.

Um z. B. ein beliebiges weiteres Tripel zugeordneter Punkte $x x' x''$ zu bestimmen, kann man den Punkt x willkürlich wählen, durch ihn eine beliebige Linie $\mathfrak{l}$ ziehen, dieser im System S' eine beliebige Linie $\mathfrak{l}'$ zuordnen und die dritte zugeordnete $\mathfrak{l}''$ in S'' ermitteln. Auf $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ sind dann die Lagen von x' und x'' bestimmt. Um $\mathfrak{l}''$ zu finden, faßt man die von den gegebenen Tripelpunkten gebildeten drei vollständigen Vierecke $a b c d$, $a' b' c' d'$, $a'' b'' c'' d''$ als die Projektionen eines Tetraeders auf, die Linien $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ als die Projektionen einer Raumgeraden und konstruiert die Projektionen der Schnittpunkte der Raumgeraden mit zwei Tetraederflächen. Nimmt man $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ der Einfachheit halber durch den Punkt a, a', a'' an (vergl. Fig. 9), so kommt nur der eine Schnittpunkt w, w', w'' mit der Dreiecksfläche $b c d$, $b' c' d'$, $b'' c'' d''$ in Betracht. Um diesen zu erhalten, denkt man sich durch die Raumgerade eine Ebene gelegt und bestimmt deren Schnittlinie mit der Dreiecksfläche. Man kann die Ebene so annehmen, daß sie sich in einem System, z. B. in S, geradlinig projiziert. Schneidet also $\mathfrak{l}$ zwei Dreiecksseiten bc und bd in u und v, und teilt man $b'c'$ und $b'd'$ in u' und v' —, desgleichen $b''c''$ und $b''d''$ in u'' und v'' nach den nämlichen bezüglichen Verhältnissen, so sind $uv, u'v', u''v''$ die Projektionen der gesuchten Schnittlinie. Wird ferner $u'v'$ von $\mathfrak{l}'$ in w' geschnitten, und teilt man uv in w —, desgleichen $u''v''$ in w'' nach dem nämlichen Verhältnis, nach dem $u'v'$ in w' geteilt erscheint, so sind w, w', w'' die Projektionen des gesuchten Schnittpunkts, und ist in $a''w''$ die Linie $\mathfrak{l}''$ gefunden. Schließlich ergeben sich die Punkte x' und x'' dadurch, daß man $a'w'$ in x' und $a''w''$ in x'' nach dem nämlichen Verhältnis teilt, nach dem aw in x geteilt erscheint.

*) Vergl. über diese Beziehung: *A. Beck*, „Über perspektive Affinität zweier Räume". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 44. Jahrg. (1899) S. 85.

§ 10.

Die einzelkernige Verwandtschaft.

Bei der in § 9 angegebenen Konstruktion der sechs Kernrichtungen aus vier Punktetripeln kann es sich ereignen, daß die zwei Kernrichtungen eines Systems sich als parallel ergeben, daß also der betreffende Kernwinkel Null wird.

Man erkennt sofort, daß wenn dies in einem System der Fall ist, es im allgemeinen*) gleichzeitig auch in den zwei anderen Systemen zutreffen muß. Denn kreuzen sich (vergl. Fig. 8) ab und cd in $[r, s]$, $a'b'$ und $c'd'$ in $[t', u']$, $a''b''$ und $c''d''$ in $[v'', w'']$, so drückt sich die Bedingung für die Parallelität der Kernrichtungen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ im System S durch die Proportion aus:

$$(2\alpha.) \qquad \frac{rt}{tv} = \frac{su}{uw}.$$

Aus ihr folgen aber vermöge der Ähnlichkeit zugeordneter Punktreihen unmittelbar die zwei weiteren Proportionen

$$(2\beta.) \qquad \frac{r't'}{t'v'} = \frac{s'u'}{u'w'} \quad \text{und} \quad \frac{r''t''}{t''v''} = \frac{s''u''}{u''w''},$$

welche die Parallelität der Kernrichtungen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ in S', bezw. $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{q}''$ in S'' ausdrücken.

Bezeichet man die Verhältnisse

$$\frac{ar}{ab}, \frac{a't'}{a'b'}, \frac{a''v''}{a''b''} \quad \text{durch} \quad \alpha, \alpha', \alpha'',$$

$$\frac{cs}{cd}, \frac{c'u'}{c'd'}, \frac{c''w''}{c''d''} \quad \text{durch} \quad \gamma, \gamma', \gamma'',$$

so läßt sich die genannte Bedingung leicht auf die Form bringen:

$$(3.) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \alpha' & \gamma' & 1 \\ \alpha'' & \gamma'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es kommen also in den drei vollständigen Vierecken, die von den gegebenen Tripelpunkten gebildet werden, nur die Verhältnisse der Kreuzungs-

*) Einen Ausnahmefall behandelt § 13.

abschnitte dreier entsprechenden Paare von Gegenseiten, nicht aber deren Winkel in Betracht.

Will man den in Rede stehenden Fall erhalten, so können von den dreimal vier Tripelpunkten 11 willkürlich angenommen werden. Von dem zwölften, z. B. d'', darf man noch die Richtung einer durch ihn gehenden Vierecksseite, z. B. $c''d''$, beliebig wählen. Seine Lage auf dieser ist aber dann bestimmt und wird durch folgende Konstruktion erhalten (vergl. Fig. 8): Teile ab und cd in den Punkten t und u nach den bezüglichen Verhältnissen $a't':t'b'$ und $c'u':u'd'$; ferner ab im Punkt v nach dem Verhältnis $a''v'':v''b''$; bestimme den Punkt w durch die Parallele vw zu tu und teile $c''w''$ im Punkt d'' nach dem Verhältnis $cd:dw$.

Befinden sich drei solche besonderen Systeme in ebener Orientierung, so degenerieren die Kernstrahlensechsecke der einzelnen Punktetripel $xx'x''$ zu lauter ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken, deren Ecken auf den Grundschnitten liegen (vergl. Fig. 10α).

Gleiches findet bei räumlicher Orientierung statt. Eine solche kann von der ebenen Orientierung aus wie im allgemeinen Fall dadurch hergestellt werden, daß man je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel nach kongruenten Punktreihen schneidet, die etwa durch den alten Scheitelpunkt O gehen, und diese zu räumlichen Grundschnitten vereinigt. Es bilden dann die drei Kernstrahlen der einzelnen Punktetripel lauter ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke, in deren Ebenen die jeweiligen drei Kernebenen zusammenfallen, und in denen daher auch die drei objizierenden Strahlen liegen.

Geht man umgekehrt von der Erzeugung dreier parallelprojektiv-trilinearen ebenen Systeme durch dreifältige Parallelprojektion eines räumlichen Systems aus, so ergibt sich die in Rede stehende besondere Verwandtschaftsform dann, wenn die drei projizierenden Richtungen der nämlichen Ebene parallel sind. Dann liegen die projizierenden Strahlen jedes Raumpunktes in der nämlichen Ebene, deren Schnittlinien mit den drei Projektionsebenen das Kernstrahlendreieck bilden. — Hat man als Objekt ein Tetraeder $ABCD$, und sind R und S, T und U, V und W diejenigen auf zwei Gegenkanten AB und CD liegenden Punkte, die sich als Kreuzungspunkte $[r, s]$, $[t', u']$, $[v'', w'']$ projizieren (vergl. Fig. 8), so fallen die bezüglichen projizierenden Strahlen mit den Verbindungslinien RS, TU, VW zusammen. Sind nun diese Linien der nämlichen Ebene parallel, so müssen die Abstände der drei Punkte R, T, V denen der drei Punkte S, U, W pro-

Punktreihen bleibt die Sachlage im wesentlichen die gleiche wie bei der doppelkernigen Verwandtschaft. Nur vereinfacht sich die in § 7 besprochene Konstruktion insofern, als jetzt die zwei Kernebenen γ_{01} und γ_{12} zusammenfallen, und demgemäß an Stelle der Kurve der Punkte C (vergl. Fig. 6α) die von den Punkten B gebildete Hyperbel tritt.

Eine den Verhältnissen der doppelkernigen Verwandtschaft durchaus fremde Erscheinung tritt dagegen auf bei denjenigen zugeordneten Punktreihen, die in entsprechenden Kernstrahlen liegen: Die Seiten jedes Kernstrahlendreiecks stellen ein Tripel zugeordneter Geraden vor, als deren Objektgerade jede beliebige in der Dreiecksebene liegende Gerade gelten kann. Die auf ihnen liegenden zugeordneten Punkte bilden drei *parallelprojektiv-trilineare Punktreihen*, wie sie bereits im IV. Art., § 7*) erwähnt wurden.

§ 11.

Parallelprojektiv-trilineare Punktreihen und Strahlenbüschel.

Drei parallelprojektiv-trilineare Punktreihen werden erzeugt durch dreifältige Parallelprojektion der Punkte eines ebenen Systems auf drei in der Systemebene liegende gerade Linien. Sie bilden einen Spezialfall der durch Zentralprojektion erzeugten *einzelkernig-trilinearen* Punktreihen (vergl. IV. Art., § 7), dadurch bedingt, daß die in gerader Linie liegenden drei Projektionszentren ins Unendliche fallen, was zur Folge hat, daß auch die drei Kernpunkte unendlich fern rücken. Diese stellen singuläre Punkte vor von der Eigenschaft, daß je zweien derselben jeder beliebige Punkt der dritten Punktreihe zugeordnet ist.

Da drei allgemeine einzelkernig-trilineare Punktreihen bestimmt sind durch die drei Kernpunkte und 3 Tripel zugeordneter Punkte (vergl. IV. Art., § 8), so sind drei parallelprojektiv-trilineare Punktreihen *bestimmt durch 3 Tripel zugeordneter Punkte.*

Hieraus folgt: Liegen die drei Punktreihen in einer Ebene so, daß 3 Tripel zugeordneter Punkte als Parallelprojektionen von drei Punkten der Ebene parallel zu den nämlichen drei Projektionsrichtungen erscheinen, so ist dies für sämtliche Punktetripel der Fall, das heißt: — so befinden

*) Siehe dieses Journal, Bd. 108, S. 39.

sich die Punktreihen in orientierter Lage. — Liegen nun die drei Punktreihen $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ ganz beliebig in einer Ebene und schneiden sich ihre Träger in den drei Punkten R, S, T, so erweist sich die genannte Bedingung in jedem Fall als zutreffend für diejenigen 3 Punktetripel $r\,r'\,r''$, $s\,s'\,s''$, $t\,t'\,t''$, von denen die Punkte r und r', s' und s'', t'' und t bezw. in R, S, T vereinigt liegen; R, S, T erscheinen als ihre Objektpunkte; die drei Projizierungsrichtungen sind parallel zu Ss, Tt', Rr''. Parallel zu diesen müssen folglich auch sämtliche übrigen Punktetripel orientiert sein. Demgemäß ergibt sich, daß drei parallelprojektiv-trilineare Punktreihen *bei jeder beliebigen Lage mit drei Schnittpunkten* orientiert sind.

Eine Unbestimmtheit tritt ein, wenn sich die drei Träger im nämlichen Punkt schneiden. Liegen in diesem Fall drei zugeordnete Punkte im Schnittpunkt vereinigt, so kann eine der drei Projizierungsrichtungen willkürlich angenommen werden, wodurch die zwei anderen bestimmt sind. (Dies ergibt sich aus folgender Erwägung: Verschiebt man eine der drei Punktreihen parallel mit einer *beliebigen* Richtung, so erweist sich ihre Objizierungsrichtung für die neue Lage als identisch mit der jeweiligen Verschiebungsrichtung. Verschiebt man dann die Punktreihe parallel mit derselben Richtung wieder zurück in ihre alte Lage, so ändern sich hierbei die drei Objizierungsrichtungen nicht.) — Ist im Schnittpunkt kein Punktetripel vereinigt, so fallen die projizierenden Strahlen mit den Trägern selbst zusammen; sämtliche Punktetripel objektivieren sich in den gemeinsamen Schnittpunkt. — Bei paralleler Lage ihrer Träger sind die drei Punktreihen im allgemeinen *nicht* orientiert. Wir werden auf diesen Ausnahmefall in § 19 (s. S. 157, Fußnote) zurückkommen.

Sind die drei Punktreihen $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ (vergl. Fig. 10β) durch 3 Tripel zugeordneter Punkte $a\,a'\,a''$, $b\,b'\,b''$, $c\,c'\,c''$ gegeben, und befinden sie sich in irgend welcher Lage in einer Ebene, bei der sich ihre Träger in den Punkten R, S, T schneiden, so können beliebige weitere Punktetripel $x\,x'\,x''$, sowie die jener Lage entsprechenden Objizierungsrichtungen auf folgende Weise ermittelt werden:

Man bringt die drei Punktreihen in einer Nebenfigur in eine solche Lage, bei welcher von jedem der drei Punktetripel zwei Punkte zusammenfallen. Dies geschieht, indem man z. B. (vergl. Fig. 10γ) ein Dreieck mit den Strecken ca, $a'b'$, $b''c''$ als Seiten zeichnet und auf den Seiten die Punktreihen so aufträgt, daß in den drei Ecken A, B, C die Punkte a und a',

b' und b'', c'' und c vereinigt liegen. Für diese Lage geben sich nun nach der vorangehenden Erörterung die zugehörigen Objizierungsrichtungen unmittelbar zu erkennen als parallel zu bB, $c'C$, $a''A$. Projiziert man also irgend einen Punkt X der Dreiecksebene parallel zu diesen Richtungen auf die betreffenden Dreiecksseiten, so stellen die Projektionen $x\,x'\,x''$ ein Tripel zugeordneter Punkte vor. Hierdurch können beliebige weitere Punktetripel zunächst in der Nebenfigur (Fig. 10γ) bestimmt und dann in die Hauptfigur (Fig. 10β) übertragen werden. — Um die Objizierungsrichtungen für die Hauptfigur selbst zu ermitteln, überträgt man die in den Punkten R, S, T der Hauptfigur vereinigt liegenden Punkte r, r'; s', s''; t'', t in die Nebenfigur, bestimmt dort die dritten zugeordneten Punkte r'', s, t', und überträgt diese in die Hauptfigur. Dann sind die Objizierungsrichtungen der Hauptfigur parallel zu den Verbindungslinien sS, $t'T$, $r''R$.

Statt die Hilfskonstruktionen in eine Nebenfigur zu verlegen, kann man sie auch der Hauptfigur selbst einverleiben, indem man drei Hilfspunktreihen $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ benutzt, die nach dem Muster der Fig. 10γ angeordnet und zu den drei Punktreihen $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$, $a''\,b''\,c''$ der Hauptfigur bezw. parallelperspektiv sind. Man kann z. B. (vergl. Fig. 10β) als Träger der Hilfspunktreihen die Verbindungslinien $c\,a'$, $a'\,b''$, $b''c$ wählen und auf sie die Punktreihen abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ parallel zu $a\,a'$, $b'\,b''$, $c''c$ projizieren nach $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$. (γ und α fallen mit c und a' zusammen, α' und β' mit a' und b'', usw.) Man führt dann an diesen Hilfspunktreihen die bezüglichen Konstruktionen ganz ebenso aus wie vorher in der Nebenfigur und projiziert die gewonnenen Punkte von den Hilfspunktreihen zurück auf die gegebenen Punktreihen.

Sind $xx'x''$ und $yy'y''$ irgend zwei Tripel zugeordneter Punkte, X und Y ihre zugehörigen Objektpunkte, so bilden die Punktetripel, welche die Projektionen der übrigen Punkte der geraden Verbindungslinie XY vorstellen, drei ähnliche Punktreihen. Durch je zwei Tripel zugeordneter Punkte ist ein solches Tripel ähnlicher Punktreihen bestimmt. Drei parallelprojektiv-trilineare Punktreihen enthalten also in sich ∞^2 Tripel ähnlicher Punktreihen, deren entsprechende Punkte einander zugeordnet sind.

Wenn drei parallelprojektiv-trilineare Punktreihen durch 3 Punktetripel bestimmt sein sollen, so dürfen diese nicht den nämlichen drei zugeordneten ähnlichen Punktreihen angehören, es dürfen also die Abstände der Punkte a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' nicht proportioniert sein.

Sind die Abstände nur in zwei Punktreihen proportioniert — ist z. B. $ab:bc = a'b':b'c'$ —, so liegt eine *Ausartung* der parallelprojektiv-trilinearen Beziehung vor. Liegen die drei Punktreihen $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ beliebig in einer Ebene mit den Schnittpunkten R, S, T (vergl. Fig. 11), und führt man die oben angegebene Konstruktion zur Bestimmung der Objizierungsrichtungen aus, so ergibt sich die Objizierungsrichtung $\mathfrak{r}''$ von $\mathfrak{l}''$ parallel zu $\mathfrak{l}''$; diejenigen von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ ordnen sich so, daß sich die objizierenden Strahlen von a und a', b und b', c und c' auf $\mathfrak{l}''$ schneiden. Die Zuordnungsverhältnisse der Punkte der drei Punktreihen gestalten sich hiernach wie folgt: Es sind zwei Arten von Punktetripeln zu unterscheiden: 1) Die Punkte der Punktreihen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ sind ähnlich gepaart, jeder auf $\mathfrak{l}''$ liegende Objektpunkt X projiziert sich in zwei entsprechende Punkte x, x' dieser Paarung; als dritter x'' ist ihnen jeder beliebige Punkt von $\mathfrak{l}''$ zugeordnet. 2) Ein beliebig in der Ebene liegender Objektpunkt Y projiziert sich auf $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ in zwei Punkte y und y', die nicht entsprechende Punkte der ähnlichen Paarung sind; der dritte zugeordnete Punkt y'' fällt stets in den unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{l}''$.

Man erkennt, daß hier dieselbe Ausartung der trilinearen Beziehung dreier Punktreihen vorliegt, auf die bereits im IV. Art., § 11 aufmerksam gemacht wurde; es tritt nur die Spezialisierung ein, daß jetzt der singuläre Punkt von $\mathfrak{l}''$ im Unendlichen liegt.

Es ist von Interesse, die Bestimmung der Objizierungsrichtungen genauer zu verfolgen und dabei die bemerkenswerte Wandlung zu beobachten, die die Verhältnisse erfahren, wenn die gegenseitige Lage der Punktreihen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ (etwa durch Verschiebung einer von ihnen in sich selbst) so geändert wird, daß in ihrem Schnittpunkt R zwei entsprechende Punkte der ähnlichen Paarung zusammenfallen. Die Punkte a, b, c liegen dann parallelperspektiv zu a', b', c'; die Objizierungsrichtungen von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ fallen beide mit der Perspektivitätsrichtung zusammen; die Objizierungsrichtung von $\mathfrak{l}''$ wird unbestimmt. Es leuchtet ein, daß hierdurch die nämlichen Zuordnungsverhältnisse gewährleistet sind wie bei der ursprünglichen Anordnung. Zu einem Punktetripel $xx'x''$ der ersten Art wird jetzt der zugehörige Objektpunkt unbestimmt; zu einem Punktetripel $yy'y''$ der zweiten Art fällt er in den unendlich fernen Punkt der Perspektivitätsrichtung.

Kehren wir zu den gewöhnlichen parallelprojektiv-trilinearen Punktreihen zurück! Zur Bestimmung der Punktreihen kann statt dreier getrennten Punktetripel auch ein *Sextupel zugeordneter Punkte*, wie es bereits im IV. Art.

§ 7 eingeführt wurde, benutzt werden. Ein solches Sextupel besteht (vergl. Fig. 10α) aus drei *Hauptpunkten* $a_{12}, a'_{23}, a''_{31}$, die beliebig gewählt werden können, und aus drei *Nebenpunkten* a_3, a'_1, a''_2, die aus den Hauptpunkten dadurch abgeleitet werden, daß jeder von ihnen zweien Hauptpunkten zugeordnet ist. Die Bezeichnung ist so getroffen, daß je drei Punkte, welche gleiche Indizes, aber verschiedene Akzente tragen, ein Tripel bilden. Das Sextupel schließt also 3 Tripel in sich, nämlich: $a_{12}\,a'_1\,a''_{31}$, $a_{12}\,a'_{23}\,a''_2$, $a_3\,a'_{23}\,a''_{31}$. Die sechs Punkte des Sextupels stellen die Projektionen der drei Ecken eines Dreiecks $A_1\,A_2\,A_3$ vor, dessen Seiten parallel zu den projizierenden Strahlen sind; in jeden Hauptpunkt projizieren sich 2 Ecken; die Projektionen tragen die gleichen Indizes wie ihre bezüglichen Objektpunkte.

Für verschiedene Punktesextupel der drei Punktreihen sind die zugehörigen Objektdreiecke ähnlich und ähnlich liegend. Daher stehen in sämtlichen Sextupeln die drei Sextupelstrecken $a_{12}\,a_3$, $a'_{23}\,a'_1$, $a''_{31}\,a''_2$ im nämlichen Verhältnis. Die Punktreihen sind demgemäß schon *bestimmt durch die Verhältnisse ihrer Sextupelstrecken*. Sind sie durch diese gegeben, und sollen weitere Punktetripel ermittelt werden, so zeichnet man in einer Nebenfigur (vergl. Fig. 10δ) ein Hilfsdreieck aus drei den gegebenen Verhältnissen entsprechenden Strecken als Seiten und trägt auf den Seiten die Punktreihen so auf, daß in die Ecken je zwei Sextupelpunkte mit gleichen Indizes, z. B. a_{12} und a'_1, a'_{23} und a''_2, a''_{31} und a_3 zu liegen kommen. Die drei Objektpunkte A_1, A_2, A_3 fallen dann ebenfalls in die bezüglichen Ecken; die Objizierungsrichtungen werden parallel den Dreiecksseiten, und zwar für jede Punktreihe parallel zu derjenigen Dreiecksseite, die durch ihren Hauptpunkt geht. — Die Hilfsfigur kann übrigens auch der Hauptfigur selbst einverleibt werden in ähnlicher Weise wie in Fig. 10β. Die Fig. 10γ geht in die Fig. 10δ über, und ebenso die Fig. 10β in die entsprechende Sextupelfigur, wenn man in ihnen die Punkte a und b, b' und c', c'' und a'' zusammenfallen läßt.

Soll ein gegebenes Punktetripel zu einem Sextupel ergänzt werden, so nimmt man zwei Tripelpunkte als Hauptpunkte a_{12} und a''_{31}, den dritten als Nebenpunkt a'_1, wählt den dritten Hauptpunkt a'_{23} beliebig und bestimmt die zwei anderen Nebenpunkte a''_2 und a_3 als zugeordnet zu a_{12} und a'_{23}, bezw. zu a'_{23} und a''_{31}.

Bei Benutzung eines Punktesextupels zur Bestimmung der drei Punktreihen macht sich die konstruktive Behandlung der Aufgaben in der Regel sehr bequem. Auch der analytische Ausdruck der Beziehung zwischen drei

jede Punktreihe noch in zu ihr senkrechter Richtung beliebig parallelverschoben werden.

Was die Beziehung zwischen drei zugeordneten *Strahlenbüscheln* in der einzelkernigen Verwandtschaft anlangt, so bilden dieselben drei *einzelkernig-trilineare* Büschel allgemeinster Art, wie sie im IV. Art., § 9 betrachtet wurden. a, a', a'' seien die drei Zentren, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ die durch sie gehenden Kernstrahlen, $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ sei ein variables Strahlentripel. Ferner mögen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}', \mathfrak{w}''$ diejenigen Strahlen bedeuten, welche (als Nebenstrahlen) mit den zu $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ rechtwinkligen Strahlen (als Hauptstrahlen) ein Sextupel bilden der Art, daß jeder von ihnen zweien der rechtwinkligen Strahlen zugeordnet ist. Werden nun die Seiten irgend eines Kernstrahlendreiecks von den rechtwinkligen Strahlen in den Punkten $r_{12}, r'_{23}, r''_{31}$ —, von den Strahlen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}', \mathfrak{w}''$ in r_3, r'_1, r''_2 —, von den Strahlen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ in x, x', x'' geschnitten, so bilden die sechs Punkte $r_{12}, r'_{23}, r''_{31}$; r_3, r'_1, r''_2 ein Sextupel zugeordneter Punkte. Zwischen ihnen und den Punkten x, x', x'' besteht die Punktreihen-Relation (5α). Setzt man für die in ihr enthaltenen drei Quotienten die aus den rechtwinkligen Dreiecken $ar_{12}x$ und $ar_{12}r_3$ u. s. w. sich unmittelbar ergebenden Ausdrücke $\frac{r_{12}x}{r_{12}r_3} = \frac{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}, \mathfrak{x})}{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}, \mathfrak{u})}$ u. s. w. ein, so erhält man die Strahlenbüschel-Relation:

$$(6.)\qquad \frac{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}, \mathfrak{x})}{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}, \mathfrak{u})} + \frac{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}', \mathfrak{x}')}{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}', \mathfrak{v}')} + \frac{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}'', \mathfrak{x}'')}{\operatorname{ctg}(\mathfrak{p}'', \mathfrak{w}'')} = 1.$$

Diese ist aber identisch mit der Relation, die im IV. Artikel, § 9 (Gleichung 15) als Ausdruck für die einzelkernig-trilineare Beziehung dreier Strahlenbüschel in der zentralprojektiven Verwandtschaft gefunden wurde.

Um ein Tripel zugeordneter Strahlen konstruktiv zu ermitteln, bestimmt man auf irgend drei entsprechenden Kernstrahlen drei zugeordnete Punkte x, x', x'' und verbindet diese mit den drei Zentren. Die Bestimmung von x, x', x'' geschieht, falls die objizierenden Strahlen nicht bekannt, aber die Strahlen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}', \mathfrak{w}''$ gegeben sind, von dem Punktesextupel aus, nach dem die Kernstrahlen von den drei rechtwinkligen Strahlen und den drei Strahlen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}', \mathfrak{w}''$ geschnitten werden, mittels des oben besprochenen Verfahrens.

Man kann aber bei ebener Orientierung der drei Systeme auch eine direkte Strahlenkonstruktion ausführen. Wie wir dies bei doppelkernigen Strahlenbüscheln (vergl. § 8) durch die Verwendung von drei zu ihnen perspektiv liegenden besonderen *Ceva*-Büscheln bewerkstelligt haben, so kann

man sich bei einzelkernigen Strahlenbüscheln der Vermittelung von drei zu ihnen perspektiven Hilfsbüscheln bedienen, die in der speziellen einzelkernigen Beziehung stehen, die wir im IV. Art., § 9 als *Poncelet-Beziehung besonderer Art* gekennzeichnet haben. Bei ihr bilden die drei rechtwinkligen Strahlen ein zugeordnetes Tripel, die drei Zentren liegen in einer geraden Linie, in welche ihre drei Kernstrahlen zusammenfallen; je drei Strahlen, die sich im nämlichen Punkt schneiden, sind einander zugeordnet. Drei solche *Poncelet*-Büschel n, n', n'', die auf die gegebenen Büschel a, a', a'' perspektiv bezogen sind, können durch folgende Anordnung erhalten werden: Die Büschel a, a', a'' seien gegeben durch ihre Kernstrahlen und die drei Strahlen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}', \mathfrak{w}''$. Man hat also in jedem Büschel 3 Strahlen: den Kernstrahl, den rechtwinkligen Hauptstrahl und einen schiefen Nebenstrahl. In den drei *Poncelet*-Büscheln denke man sich das von den drei rechtwinkligen Strahlen gebildete Strahlentripel zu einem Sextupel ergänzt, als dessen Hauptstrahlen die rechtwinkligen Strahlen von n und n' — und ein beliebiger schiefer Strahl von n'' genommen werden, und dessen Nebenstrahlen sich dadurch bestimmen, daß sie sich mit je zweien dieser Hauptstrahlen im nämlichen Punkt schneiden. Man hat also auch in jedem *Poncelet*-Büschel 3 Strahlen: den Kernstrahl, den rechtwinkligen und einen schiefen Strahl; von den zwei letzteren ist immer einer ein Hauptstrahl, der andere ein Nebenstrahl. Es werden nun je zwei entsprechende Strahlenbüschel a und n, a' und n', a'' und n'' so auf einander projektiv bezogen, daß 1) die zwei Kernstrahlen, 2) diejenigen zwei Strahlen, die Hauptstrahlen sind, 3) diejenigen zwei Strahlen, die Nebenstrahlen sind, als entsprechend einander zugeteilt werden. Die perspektive Lage endlich wird dadurch gesichert, daß man 1) im Büschel n den Kernstrahl mit dem Kernstrahl des Büschels a zusammenfallen läßt, 2) im Büschel n' den schiefen Nebenstrahl mit dem schiefen Nebenstrahl des Büschels a', 3) im Büschel n'' den schiefen Hauptstrahl mit dem rechtwinkligen Hauptstrahl des Büschels a''. Dadurch sind die drei *Poncelet*-Büschel bestimmt. Ihre drei Zentren n, n', n'' liegen auf dem Kernstrahl $\mathfrak{p}$ des Büschels a und ergeben sich wie folgt: Der Kernstrahl $\mathfrak{p}$ wird geschnitten — von dem schiefen Nebenstrahl $\mathfrak{v}'$ des Büschels a' im Punkt n', — von dem rechtwinkligen Hauptstrahl des Büschels a'' im Punkt n'', — von der Senkrechten durch den Schnittpunkt der genannten zwei Strahlen im Punkt n.

schneiden diese drei Strahlenpaare auf den Seiten des Kernstrahlendreiecks ein Sextupel zugeordneter Punkte $r_{12}\, r'_{23}\, r''_{31}$, $r_3\, r'_1\, r''_2$ aus, mit dessen Hilfe die Ermittelung der Objizierungsrichtungen auf die nämliche Weise erfolgt wie vorhin.

§ 13.

Zwittrige Ausartung der Verwandtschaft.

Eine interessante Ausartung der parallelprojektiv-trilinearen Verwandtschaft erhält man, wenn nur ein einziger Kernwinkel, z. B. ω'', Null ist. Sie bildet in gewissem Sinn ein Mittelglied zwischen der doppelkernigen und der einzelkernigen Verwandtschaftsform und mag aus diesem Grunde, sowie mit Rücksicht auf eine eigentümliche Zwiespältigkeit, die ihre Punktetripel aufweisen, als *zwittrige Ausartung* bezeichnet werden.

Die Verwandtschaft sei gegeben durch die zwei Kernwinkel ω, ω' und die drei Kernbüschelverhältnisse $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{20}$. Bringt man die drei Systeme in beliebige ebene oder räumliche Orientierung (vergl. Fig. 12α, welche ebensowohl als ebene Figur wie als parallelperspektivische Abbildung einer räumlichen Figur aufgefaßt werden kann), so ergibt sich hinsichtlich der Zuordnungsverhältnisse der Punkte unmittelbar folgendes:

Es sind zwei Arten von Punktetripeln zu unterscheiden: 1) Für alle Punktetripel $x\,x'\,x''$, deren Kernstrahlensechseck zu einem geschlossenen Fünfeck degeneriert, erweisen sich x und x' als entsprechende Punkte zweier affinen Systeme; denn es sind nicht bloß ihre gegnerischen Kernstrahlen $x\,G_{01}$ und $x'\,G_{01}$, sondern auch ihre zwei anderen Kernstrahlen xG_{20} und $x'G_{12}$ ähnlich auf einander bezogen. Zu zwei entsprechenden Punkten x, x' dieser affinen Paarung ist im System S'' jeder beliebige Punkt x'' der in $G_{12}\,G_{20}$ zusammenfallenden zwei Kernstrahlen zugeordnet. 2) Sind y und y' zwei zugeordnete Punkte von S und S', die nicht der affinen Paarung angehören, so werden die zwei zugehörigen Kernstrahlen im System S'' parallel; der dritte zugeordnete Punkt y'' ist also stets der unendlich ferne Punkt der gemeinsamen Kernrichtung [$\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$]. Umgekehrt ist zu einem beliebigen Punkt y in S und dem unendlich fernen Punkt von [$\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$] in S'' der dritte zugeordnete y' in S' auf dem betreffenden Kernstrahl unbestimmt.

Ermittelt man die der (ebenen oder räumlichen) Orientierung entsprechenden Objizierungsrichtungen (etwa nach dem dritten in § 5 genannten

Verfahren), so ergibt sich die Objizierungsrichtung $\mathfrak{r}''$ von S'' parallel zur Kernrichtung $[\mathfrak{p}'', \mathfrak{q}'']$. Die Punktetripel $x x' x''$ der ersten Art objektivieren sich in Punkten X, die in der Ebene S'' liegen und in dieser ein ebenes System bilden, das zu jedem der von den Punkten x und x' gebildeten zwei affinen Systemen perspektiv-affin ist. Jeder nicht in der Ebene S'' liegende Objektpunkt Y projiziert sich in ein Punktetripel $y y' y''$ der zweiten Art.

Diese Objizierungsverhältnisse erleiden eine bemerkenswerte Änderung, wenn die eben- oder räumlich-orientierte Lage der drei Systeme so angeordnet wird, daß in S und S' die zwei nicht gegnerischen Kernstrahlen $G_{20}x$ und $G_{12}x'$ eines geschlossenen Kernstrahlenfünfecks sich in einem Punkte Γ'_{01} des Grundschnittes $\mathfrak{g}_{01}$ schneiden (vergl. Fig. 12β). Um dies zu erreichen, bemerke man, daß die auf den genannten Kernstrahlen liegenden entsprechenden Punkte x, x' der affinen Paarung zwei ähnliche Punktreihen bilden, von welchen bei der gedachten Lage zwei entsprechende Punkte im Punkt Γ'_{01} vereinigt sind. Geht man also von einer beliebigen ebenen Orientierung aus, wie sie Fig. 12α zeigt, so hat man unter Festhaltung der Lage von S' und S'' das System S in der gemeinsamen Ebene so lange um den Scheitelpunkt O zu drehen, bis zwei entsprechende Punkte der zwei ähnlichen Punktreihen in einem Punkt Γ'_{01} zusammenfallen. Die letztere Aufgabe ist vom 2. Grad; die gedachte besondere Orientierung ist also nicht immer reell ausführbar.*) Ergibt sich eine reelle Lösung, so wird von der neuen ebenen Orientierung aus eine räumliche Orientierung in der Art hergestellt, daß sie mit der ebenen die Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{20}$ gemein, aber statt des ebenen Grundschnittes $\mathfrak{g}_{12}$ den räumlichen $\mathfrak{h}_{12}$ hat.

Die dieser besonderen (ebenen oder räumlichen) Orientierung ent-

---

*) Ist ϱ_{01} das Ähnlichkeitsverhältnis der zwei Punktreihen, und ist (vergl. Fig. 12β) t der Fußpunkt der von O auf $G_{20}x$ gefällten Senkrechten, t' der ihm entsprechende Punkt auf $G_{12}x'$, so muß sein: $\varrho_{01}^2 = \frac{t\Gamma_{01}^2}{t'\Gamma_{01}^2} = \frac{O\Gamma_{01}^2 - Ot^2}{t'\Gamma_{01}^2}$, oder (mit Weglassung der Indizes): $O\Gamma^2 - \varrho^2 \cdot t'\Gamma^2 = Ot^2$. Hieraus folgt nach dem Theorem von *Stewart* (s. *Chasles-Sohncke*, Gesch. der Geom. § 28), daß, wenn man die Strecke Ot' in m nach dem Verhältnis $\frac{Om}{mt'} = -\varrho^2$ teilt, der Punkt Γ auf einem Kreis aus m mit dem Halbmesser $\frac{Ot}{\varrho^2 - 1}$ liegt. — Das Ähnlichkeitsverhältnis ϱ_{01} ergibt sich $= \varepsilon_{01}\frac{\sin\omega'}{\sin\omega}$. Als Bedingung für eine reelle Lösung erhält man:

$$(\varepsilon_{01}\cos\omega' - \varepsilon_{12}\varepsilon_{20}\cos\omega)^2 + (\varepsilon_{01}^2 - 1)(\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{20}^2 - 1) \geqq 0.$$

sprechenden Objizierungsverhältnisse gestalten sich nun wie folgt (vergl. Fig. 12β): Da die Abstände des Punktes I'_{01} von je zwei entsprechenden Punkten x und x' der zwei ähnlichen Punktreihen proportioniert sind, so liegen jetzt die von der Gesamtheit der Punktepaare x, x' gebildeten zwei affinen Systeme perspektiv; der neue Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ stellt die Affinitätsachse vor. Die Objizierungsrichtungen von S und von S' fallen beide zusammen mit der Affinitätsrichtung; die Objizierungsrichtung von S'' wird unbestimmt. Die zu den Punktetripeln $xx'x''$ der ersten Art gehörigen Objektpunkte X liegen unbestimmt auf den Affinitätsstrahlen; die Punktetripel $yy'y''$ der zweiten Art objektivieren sich sämtlich in dem unendlich fernen Punkt der Affinitätsstrahlen.

Überraschend ist ferner die Wahrnehmung, daß die Zuordnung der Punktetripel $xx'x''$ der ersten Art durch eine gewisse Änderung der drei Bestimmungselemente $\omega, \omega', \varepsilon_{01}$ nicht gestört wird. Man kann die gegnerischen Kernrichtungen von S und S' derart variieren, daß man die Ecke G_{01} eines Kernstrahlenfünfecks beliebig auf dem Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ verrückt, ohne daß sich in der Zuordnung der genannten Punkte etwas ändern würde. Nur die Punktetripel $yy'y''$ der zweiten Art werden dadurch beeinflußt.

Läßt man die Ecke G_{01} in den Punkt I'_{01} fallen, so werden auch die Kernwinkel ω und ω' Null, die Verwandtschaft erhält einzelkerniges Gepräge, und zwar stellt sie eine *Ausartung* der einzelkernigen Verwandtschaft dar. Die auf den Seiten jedes Kernstrahlendreiecks liegenden Punktetripel bilden drei ausgeartete parallelprojektiv-trilineare Punktreihen von der Art, wie sie in § 11 (S. 123) betrachtet wurden.

Werden also nur die Punktetripel $xx'x''$ der ersten Art in Rücksicht gezogen, so ist durch sie die Verwandtschaft relativ unbestimmt. Sie erhält ihre Individualisierung erst durch die Punktetripel $yy'y''$ der zweiten Art, und zwar genügt ein einziges Tripel zu ihrer vollen Bestimmung: Man hat nur zu y den ihm in der affinen Paarung der Punkte x, x' entsprechenden Punkt zu ermitteln und ihn mit y' zu verbinden, desgleichen den zu y' affinen Punkt mit y zu verbinden, so bestimmen diese zwei Verbindungslinien die gegnerischen Kernrichtungen von S und S'.

Nunmehr findet auch, wenn die Verwandtschaft durch vier Tripel zugeordneter Punkte gegeben ist, der Fall seine Aufklärung, wo von den durch die Tripelpunkte bestimmten drei vollständigen Vierecken 2 zu einander affin sind (vergl. § 9). Es liegt dann eben eine zwittrig ausgeartete

Verwandtschaft vor, die aber, da die gegebenen vier Punktetripel zu den Tripeln $xx'x''$ der ersten Art gehören, nicht vollbestimmt ist.

Betrachtet man den Fall unter dem Gesichtspunkt der in § 9 erörterten Konstruktionen, so fallen in Fig. 8, wenn die Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$ affin sind, im System S die Punkte t und u mit Punkt $[r, s]$ zusammen, desgleichen im System S' die Punkte r' und s' mit Punkt $[t', u']$; im System S'' fällt r'' mit t'', s'' mit u'' zusammen. Demgemäß können die Gleichungen (2α) und (2β) in § 10, welche die Bedingung für die Einzelkernigkeit der Verwandtschaft ausdrücken, ebensowohl als erfüllt, wie als nicht erfüllt angesehen werden: die durch die vier Punktetripel gegebene Verwandtschaft kann ebensowohl als einzelkernig wie als doppelkernig gelten. — Was die Bestimmung der Kernrichtungen anlangt, so fallen in S'' die Kernrichtungen $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{q}''$ zusammen in die gemeinsame Richtung $[r''s'', t''u'']$; in S ist die Kernrichtung $\mathfrak{p}$ durch vw —, in S' die Kernrichtung $\mathfrak{q}'$ durch $v'w'$ bestimmt; dagegen sind die zwei gegnerischen Kernrichtungen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$ unbestimmt, sie können parallel zu irgend einem Paar entsprechender Richtungen der zwei affinen Systeme beliebig gewählt werden. Für jede Wahl erhält man einen andern Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$. Wählt man $\mathfrak{q}$ zusammenfallend mit $\mathfrak{p}$, so fällt auch $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{q}'$ zusammen; die Verwandtschaft erscheint dann als einzelkernig. Andernfalls hat sie doppelkerniges Gepräge. — Ermittelt man die Objizierungsrichtungen, so erweisen sich diese als unabhängig von der Wahl der Kernrichtungen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$; die Objizierungsrichtung von S'' wird parallel zur gemeinsamen Kernrichtung $[\mathfrak{p}'', \mathfrak{q}'']$.

Ordnet man die ebene Orientierung so an, daß die zwei affinen Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ mit vereinigten Punkten a, a' parallelperspektiv liegen (vorausgesetzt, daß dies reell möglich ist), so ändern sich die geschilderten Verhältnisse wie folgt: Der bei verschiedener Wahl der gegnerischen Kernrichtungen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$ erhaltene Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ bleibt jetzt stets derselbe und fällt mit der Affinitätsachse zusammen. Die Objizierungsrichtungen von S und S' fallen mit der Affinitätsrichtung zusammen; die Objizierungsrichtung von S'' wird unbestimmt.

§ 14.

Verschiedene Gattungen der Verwandtschaft.

Wird die doppelkernige Verwandtschaft durch die drei Kernwinkel $\omega, \omega', \omega''$ und die drei Kernbüschelverhältnisse $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{20}$ bestimmt, so kann

man verschiedene *Gattungen* und *Arten* der Verwandtschaft dadurch bilden, daß man zwischen den sechs Bestimmungselementen verschiedene Beziehungen festsetzt.

Bei jeder auf solche Weise definierten Verwandtschaftsgattung sind die zwei verschiedenen *Typen* — der stumpfwinklige und der spitzwinklige Typus (vergl. § 3) — auseinanderzuhalten. Ein Schluß von den Eigenschaften des einen Typus auf diejenigen des andern ist nicht ohne weiteres zulässig; vielmehr machen sich zum Teil einschneidende Verschiedenheiten zwischen beiden Typen geltend.

Die Verwandtschaft ist zunächst *doppelkernig*. Ihr stumpfwinkliger Typus besitzt aber eine *einzelkernige Ausartung*, falls die sie definierenden Beziehungen zwischen den Bestimmungselementen sich verträglich erweisen mit den für die einzelkernige Verwandtschaft maßgebenden Bedingungen: $\omega = \omega' = \omega'' = 0$, $\varepsilon_{01}\varepsilon_{12}\varepsilon_{20} = 1$ (vergl. (4α) und (4β) in § 10).

Für jede Verwandtschaftsgattung ergibt sich eine gewisse Orientierungsform, bei der ihre Besonderheiten am anschaulichsten zutage treten. Wir nennen sie die *charakteristische Orientierung*.

Es kann nicht die Absicht sein, die reiche Mannigfaltigkeit von interessanten Einzelerscheinungen, die die verschiedenen Gattungen und Arten der parallelprojektiv-trilinearen Verwandtschaft darbieten, vorzuführen. Um die Anwendung der allgemeinen Theorie auf spezielle Fälle zu veranschaulichen und dabei die Theorie auf ihre Tragweite und ihre Schmiegsamkeit zu prüfen, mag es genügen, einige Fälle näher zu beleuchten, die für die *Darstellende Geometrie* von besonderem Interesse sind. Sie werden alle durch sehr einfache Beziehungen zwischen den Bestimmungselementen charakterisiert.

Einleitend seien einige der hierbei in Betracht kommenden Gesichtspunkte kurz namhaft gemacht, und zwar unter Beschränkung der Betrachtung auf nur 2 Systeme.

Die wichtigste Rolle spielt in der Darstellenden Geometrie die *Orthogonalprojektion*. Die notwendige Bedingung dafür, daß zwei parallelprojektive ebene Systeme sich beide als orthogonale Projektionen eines räumlichen Systems auffassen lassen, ist die *Kongruenz der gegnerischen Kernstrahlenbüschel*.

Bringt man die zwei Systeme zunächst in solche ebene Orientierung, bei welcher sich die zwei kongruenten Kernstrahlenbüschel in Deckung

befinden, so ist der zugehörige Grundschnitt unbestimmt; jede in der gemeinsamen Ebene gezogene Linie g kann als solcher benutzt werden. Wird der Grundschnitt senkrecht zu den Kernstrahlen gewählt, und wird dann die eine Systemebene um ihn gedreht, bis sie mit der anderen einen bestimmten Flächenwinkel macht, so stehen die durch je zwei entsprechende gegnerische Kernstrahlen gelegten Kernebenen senkrecht zu beiden Systemebenen. Daher können die in ihnen liegenden objizierenden oder projizierenden Strahlen orthogonal angenommen werden.

Ein besonderes Interesse beansprucht hierbei der Fall, wo der von den zwei Systemebenen gebildete Flächenwinkel ein Rechter ist. Diese der Darstellenden Geometrie eigentümliche Art der räumlichen Orientierung soll kurz *Mongesche Orientierung* genannt werden.

Bei zwei allgemeinen Parallelprojektionen bezeichnen wir die Bedingung, daß von den zwei Projizierungsrichtungen jede parallel zur gegnerischen Projektionsebene — und demgemäß parallel zur gegnerischen Kernrichtung sei (wie es beim allgemeinen kartesischen Koordinatensystem zutrifft), als *kartesisches Prinzip.* — Bei zwei parallelprojektiven Systemen mit kongruenten Kernstrahlenbüscheln in *Monge*scher Orientierung erscheint das kartesische Prinzip mit dem orthogonalen Prinzip vereinigt.

Sind die Kernstrahlenbüschel wieder kongruent und wählt man in der ebenen Orientierung mit sich deckenden Büscheln den Grundschnitt g in schiefer Richtung zu den Kernstrahlen, so stellen sich die zwei Systeme, nachdem die eine Ebene um einen bestimmten Flächenwinkel gedreht ist, unter allen Umständen als schiefe Parallelprojektionen dar.

Der Grundschnitt g kann auch *im Unendlichen* angenommen werden. Werden dann die Systemebenen durch räumliche Parallelverschiebung getrennt, so sind die durch je zwei entsprechende gegnerische Kernstrahlen gelegten Kernebenen unter sich parallel, und es können in ihnen die zwei Objizierungsrichtungen beliebig gewählt werden. Die zwei Systeme stellen sich also jetzt als verschiedene Parallelprojektionen eines räumlichen Systems auf zwei *parallele* Projektionsebenen dar. — Beläßt man die Systeme in der nämlichen Ebene mit sich deckenden Kernstrahlenbüscheln, so kann man durch die einzelnen Kernstrahlen die Kernebenen parallel einer beliebigen Richtung legen und in ihnen die zwei Objizierungsrichtungen beliebig wählen. Die zwei Systeme erscheinen dann als verschiedene Parallelprojektionen eines räumlichen Systems auf *die nämliche* Projektionsebene,

oder, wie wir zwei solche Projektionen kurz bezeichnen, als *komplanare* Parallelprojektionen.

Durch die vorstehenden Betrachtungen findet der Fundamentalsatz der trilinearen Verwandtschaft hinsichtlich der Beziehung zwischen zwei Projektionen eines Raumgebildes*) seine weitere Spezialisierung. Der in dieser Richtung vervollständigte Satz lautet:

Zwei ebene Gebilde, deren Punkte einander paarweise zugeordnet sind, können als *Zentralprojektionen* eines und desselben räumlichen Gebildes angesehen werden, wenn sie sich von zwei in ihren Ebenen liegenden Punkten durch projektive Strahlenbüschel projizieren lassen. Sie stellen *Parallelprojektionen* vor, wenn die zwei Strahlenbüschel ähnliche Parallelbüschel sind; sie stellen speziell *orthogonale* oder *komplanare* Parallelprojektionen vor, wenn diese Parallelbüschel kongruent sind.

§ 15.

Die orthogonale Verwandtschaft.

Wir setzen fest, alle drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel seien je unter sich kongruent, zwischen den drei Kernbüschelverhältnissen bestehe also die Beziehung:

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{20} = 1. \tag{7.}$$

Eine Verwandtschaft, die der durch diese Beziehung definierten Gattung angehört, bezeichnen wir als *orthogonale Verwandtschaft.* Sie ist durch 3 Elemente, nämlich die drei Kernwinkel ω, ω', ω'' bestimmt, und zwar in zwei verschiedenen Typen.

Bringt man die drei Systeme einer orthogonalen Verwandtschaft in ganz beliebige ebene Orientierung, so zeigt sich die Besonderheit, daß je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel den zugehörigen Grundschnitt unter gleichen Winkeln schneiden. Wir können daher den in § 2 ausgesprochenen Satz über die Erzeugung dreier parallelprojektiv-trilinearen Systeme durch ein bewegliches ebenes Sechseck dahin spezialisieren, daß, wenn die drei Leitgeraden die Sechseckswinkel an den gleitenden Ecken halbieren, die drei Systeme in orthogonaler Verwandtschaft stehen.

---

*) Siehe: Theorie der trilin. Verw., I. Art., § 2. Dieses Journal, Bd. 95, S. 9.

Die einfachste Form der ebenen Orientierung, die zwischen drei orthogonalen Systemen S, S', S'' eingerichtet werden kann, ist diejenige, bei welcher sich zwei Paare kongruenter gegnerischer Kernstrahlenbüschel in Deckung befinden. Wir wählen hierzu diejenigen zwischen S und S' und zwischen S und S''.*) Sind die Systeme durch die drei (spitzen) Kernwinkel $\omega, \omega', \omega''$ gegeben, so geschieht die Herstellung der gewünschten Orientierung wie folgt (vergl. Fig. 13A und 13B): Man zeichnet ein Viereck $x\,x'x''\,G_{12}$, dessen Winkel an den Ecken x, x', x'' (in Fig. 13A sind es die Außenwinkel, in Fig. 13B die Innenwinkel) gleich $\omega, \omega', \omega''$ sind. — Der Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ bestimmt sich als Halbierungslinie des Viereckswinkels an der Ecke G_{12}. Die zwei anderen Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$ sind zunächst unbestimmt. Verlegt man sie ebenfalls in die Linie $\mathfrak{g}_{12}$, so hat man eine ebene Orientierung mit zusammenfallenden Grundschnitten. In jedem Punkt der Linie $\mathfrak{g}_{12}$ liegen also drei zugeordnete Punkte vereinigt. — Will man die Grundschnitte getrennt, so ist es am einfachsten, $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$ senkrecht zu den zwei zusammenfallenden Kernbüschelpaaren, also senkrecht zu xx' und xx'' zu wählen, indem man einen beliebigen Punkt O auf $\mathfrak{g}_{12}$ als Scheitelpunkt nimmt.

Um von dieser ebenen Orientierung aus eine räumliche Orientierung herzustellen, verfährt man, wie in § 4 angegeben: Man behält den Scheitelpunkt O und die zwei Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$ bei und zieht durch O zwei Linien $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ so, daß sie die gegnerischen Kernstrahlen $x'G_{12}$ und $x''G_{12}$ in zwei Punkten H' und H'' schneiden, die gleiche Abstände von O haben. Am einfachsten ist es, $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ senkrecht zu den Kernstrahlen zu wählen, was möglich ist, da O gleich weit von ihnen absteht. Die drei von den Linien $\mathfrak{h}'_{12}, \mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{02}, \mathfrak{h}''_{12}$ eingeschlossenen Winkelflächen bilden jetzt das Netz des Orientierungsdreikants. Dreht man die Systemebenen S' und S'' um $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$, bis sich die zwei Linien $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ zur dritten Kante $\mathfrak{h}_{12}$ des Dreikants vereinigen, so ist die räumliche Orientierung hergestellt. — Die durch je zwei gegnerische Kernstrahlen gelegten Kernebenen stehen nun senkrecht zu den Kanten des Dreikants und bilden die Flächen eines Polar-

*) Mit Rücksicht auf die ins Auge gefaßten Beziehungen zur Darstellenden Geometrie halten wir im folgenden, wo es angezeigt erscheint, die seither beobachtete zyklische Reihenfolge der Indizes 01, 12, 20 nicht mehr konsequent aufrecht, sondern stellen uns das System S als Grundriß vor, nach der einen Seite mit S', nach der anderen mit S'' verknüpft, S' und S'' unter sich verbunden, und schreiben demgemäß die Indizes: 01, 02; 12.

dreikants desselben. Ihre drei Schnittlinien, welche die objizierenden Strahlen vorstellen, stehen daher senkrecht zu den Systemebenen. Schneiden sie sich im Punkt X, so stellen sich also die drei Punkte x, x', x'' als *Orthogonalprojektionen* des Objektpunktes X dar.

Es ist ausdrücklich hervorzuheben, daß dies nur für die besprochene besondere Art der räumlichen Orientierung gilt. Bei *jeder* anderen Orientierung erscheinen die drei Systeme — entweder alle oder zum Teil — als *schiefe* Parallelprojektionen.

Wir bezeichnen daher diese charakteristische Art der Orientierung als *orthogonale Orientierung* und sprechen also von „drei orthogonalen Systemen in räumlich-orthogonaler Orientierung".

In Fig. 13A ist das Kernstrahlenviereck $x\,x'x''G_{12}$ so gezeichnet, daß seine Innenwinkel an den drei Ecken x, x', x'' stumpf sind, daß also die spitzen Kernwinkel ω, ω', ω'' als Außenwinkel erscheinen. In Fig. 13B sind die Innenwinkel spitz. Gemäß den Ausführungen des § 3 stellt Fig. 13A den *stumpfwinkligen Typus A*, Fig. 13B den spitzwinkligen Typus B der Verwandtschaft dar. Denn das im Scheitelpunkt O vereinigte Punktetripel liegt in Fig. 13A außerhalb —, in Fig. 13B innerhalb der spitzen Kernwinkel des Tripels $x\,x'x''$ (vergl. § 3, letzten Abs.).

Die Anordnung läßt sich auch so treffen, daß die Innenwinkel zum Teil stumpf, zum Teil spitz sind. Von den sechs möglichen Kombinationen gehören (vergl. § 3) diejenigen drei Anordnungen, bei welchen ein Innenwinkel stumpf, die zwei anderen spitz sind, dem Typus A an, diejenigen drei, bei welchen ein Innenwinkel spitz, die zwei anderen stumpf sind, dem Typus B.

Von den vier Anordnungen jedes Typus kann eine jede in jede andere übergeführt werden dadurch, daß eine oder zwei Systemebenen umgelegt (gewendet) und die erforderlichen Verschiebungen vorgenommen werden. Dagegen kann keine Anordnung des einen Typus in eine des anderen übergeführt werden. — Die Figuren, die man für den Typus A bei den drei Anordnungen mit einem stumpfen und zwei spitzen Innenwinkeln erhält, stellen wieder die Netze der betreffenden Orientierungsdreikante dar. Diese bilden die drei *Nebendreikante* des Dreikants der Fig. 13A. Das letztere mag als *Hauptdreikant* bezeichnet werden. — In der nämlichen Beziehung stehen die vier Dreikantsnetze zu einander, die bei den vier Anordnungen des Typus B erhalten werden; Fig. 13B stellt das Netz des Hauptdreikants dar.

Hinsichtlich der *Möglichkeit* der Herstellung der räumlich-orthogonalen Orientierung bestehen gewisse Beschränkungen, die für die zwei Typen verschieden sind. Nach Ausweis der Figuren 13A und 13B sind die Seiten des Hauptorientierungsdreikants für den Typus A gleich $\omega, \omega', \omega''$, für den Typus B gleich $2R-\omega$, $2R-\omega'$, $2R-\omega''$. Daher ergibt sich als Bedingung für die Ausführbarkeit der orthogonalen Orientierung und also dafür, daß die drei Systeme als Orthogonalprojektionen eines räumlichen Systems aufgefaßt werden können,

A) für den *stumpfwinkligen* Typus:

$$\text{(8A.)} \qquad \omega^{(i)} + \omega^{(k)} > \omega^{(l)},$$

(die weitere Bedingung: $\omega+\omega'+\omega''<4R$ ist, da $\omega, \omega', \omega''$ als spitz vorausgesetzt sind, von selbst erfüllt), —

B) für den *spitzwinkligen* Typus:

$$\text{(8B.)} \qquad \omega+\omega'+\omega'' > 2R,$$

(die weitere Bedingung: $\omega^{(i)}+\omega^{(k)}<\omega^{(l)}+2R$ ist von selbst erfüllt).

Es ist also wohl zu beachten, daß es Systeme gibt, die der Beziehung (7.) genügen und demzufolge alle charakteristischen Eigenschaften der orthogonalen Verwandtschaft aufweisen, so daß sie als „orthogonale Systeme" anzusprechen sind, — die aber doch nicht in räumlich-orthogonale Orientierung gebracht und daher nicht als Orthogonalprojektionen eines räumlichen Systems angesehen werden können. Man kann sie als *pseudoorthogonal* bezeichnen. Es ist auch sehr wohl möglich, daß von zwei supplementären Verwandtschaftstypen die Systeme des einen Orthogonalprojektionen vorstellen, die des andern aber nicht.

Was die vier Tripel *ausgezeichneter Richtungen* von Geraden mit kongruenten zugeordneten Punktreihen anlangt, so tritt in dem vorliegenden Fall der bereits in § 7 (s. S. 109, Fußnote) erwähnte besondere Umstand ein, daß die Hyperbel der Fig. 6β infolge der Kongruenz der gegnerischen Kernstrahlenbüschel zu einem Geradenpaar degeneriert, wodurch bewirkt wird, daß die in § 7 betrachteten zwei Kegelflächen zweiter Ordnung zu Ebenenpaaren werden. Dadurch vereinfacht sich die dort besprochene Konstruktion wesentlich.

Übrigens ergeben sich die vier ausgezeichneten Richtungstripel auch unmittelbar aus der unserer Betrachtung zugrundegelegten besonderen ebenen

Orientierung (vergl. Fig. 13 A und 13 B), insofern bei dieser in dem Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ drei zugeordnete Gerade mit kongruenten zugeordneten Punktreihen vereinigt liegen. In gleicher Weise liefern die Grundschnitte $\mathfrak{g}_{12}$ der andern drei Anordnungen der Orientierungsfigur für jeden Typus drei weitere Linien mit vereinigten kongruenten zugeordneten Punktreihen.

Aus dieser Herleitung ergibt sich über die Lage der vier ausgezeichneten Richtungstripel in Beziehung zu den drei Grundschnitten der orthogonalen Orientierung unmittelbar folgendes:

Verlängert man (vergl. Fig. 13 A und 13 B) die Linie $\mathfrak{g}_{12}$ über den Punkt O und bezeichnet die den drei Systemen S, S', S'' angehörigen, von O ausgehenden Linienäste, die in der Verlängerung von $\mathfrak{g}_{12}$ zusammenfallen, durch $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \mathfrak{m}''$, so machen, wenn aus dem ebenen Netz das räumliche Dreikant hergestellt ist, je zwei dieser Linien mit der zwischenliegenden Kante gleiche Winkel ($\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ mit $\mathfrak{g}_{01}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}''$ mit $\mathfrak{g}_{02}$, $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}''$ mit $\mathfrak{h}_{12}$); die Gleichheit dieser Winkel ist in der Netzfigur augenfällig. Dies ist aber die nämliche Beziehung, in der die drei Berührungsmantellinien eines einem Dreikant einbeschriebenen oder anbeschriebenen Berührungskegels zu den drei Kanten stehen. Faßt man den *einbeschriebenen* Kegel ins Auge und legt zwei Flächen des Dreikants in die dritte *nach innen* um, so gelangen hierdurch die drei Berührungsmantellinien zur Deckung. Nun stellen Fig. 13 A und 13 B das durch Umlegung der Flächen S' und S'' *nach außen* entstandene Netz des Hauptorientierungsdreikants vor. Für das Nebendreikant, das mit dem Hauptdreikant die Fläche S gemein hat, erscheinen also die Flächen S' und S'' *nach innen* umgelegt. Demgemäß stellen die in der Verlängerung von $\mathfrak{g}_{12}$ in Deckung befindlichen drei Linienäste $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \mathfrak{m}''$ die Berührungsmantellinien des diesem Nebendreikant einbeschriebenen Kegels vor. Objektiviert man sie nach Herstellung der räumlichen Orientierung, so ergibt sich die Kegelachse als Objektgerade. Zeichnet man die Netzfigur des Nebendreikants, so fallen umgekehrt in deren bezüglicher Linie $\mathfrak{g}_{12}$ die Berührungsmantellinien des dem Hauptdreikant einbeschriebenen Kegels zusammen. — In gleicher Weise liefern die Netzfiguren der zwei anderen Nebendreikante in ihren bezüglichen Linien $\mathfrak{g}_{12}$ wechselseitig die Berührungsmantellinien der ihnen einbeschriebenen Kegel. Hiernach können wir den Satz aussprechen:

Bringt man drei orthogonale Systeme in räumlich-orthogonale Orientierung und beschreibt dem Hauptorientierungsdreikant sowie seinen drei

Nebendreikanten Berührungskegel ein, so stellen deren Berührungsmantellinien die vier durch den Scheitelpunkt gehenden ausgezeichneten Geradentripel mit kongruenten zugeordneten Punktreihen vor; die vier Kegelachsen bilden ihre Objektivierungen.

Dieser Satz hat natürlich nur für solche Systeme einen Sinn, die einer räumlich-orthogonalen Orientierung wirklich fähig sind. Indessen bleibt auch für pseudoorthogonale Systeme die Bestimmung der vier ausgezeichneten Richtungstripel aus den ebenen Orientierungsfiguren in Kraft. Ferner behalten auch die den vier mal drei Berührungsmantellinien eigentümlichen Beziehungen zwischen den Winkeln, die sie mit den drei Grundschnitten machen, ihre Giltigkeit. Es treten nur an Stelle der räumlichen Grundschnitte die rechtwinkligen Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$, $\mathfrak{g}_{02}$, $\mathfrak{h}'_{12}$, $\mathfrak{h}''_{12}$ der ebenen Orientierung. In weiterer Ausführung lassen sich diese Beziehungen allgemein (auch für pseudoorthogonale Systeme giltig) wie folgt aussprechen: In jedem System machen die vier ausgezeichneten Richtungen mit dem nämlichen Grundschnitt vier verschiedene Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; diese sind aber für alle drei Grundschnitte die gleichen; der hierbei stattfindende Zugehörigkeitswechsel ergibt sich aus dem Schema:

	$\mathfrak{g}_{01}$	$\mathfrak{g}_{02}$	$\mathfrak{h}'_{12}, \mathfrak{h}''_{12}$
I	α	β	γ
II	β	α	δ
III	γ	δ	α
IV	δ	γ	β

Darin stellen die in der gleichen Vertikalreihe stehenden vier Glieder die Winkel der vier ausgezeichneten Richtungen mit dem nämlichen Grundschnitt vor, die in der gleichen Horizontalreihe stehenden drei Glieder bedeuten die Winkel der dem nämlichen Tripel angehörigen Richtungen mit den drei Grundschnitten. — Setzt man: $\frac{\omega + \omega' + \omega''}{2} = \sigma$, so ergeben sich aus den ebenen Orientierungsfiguren für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die folgenden Werte:

A) für den *stumpfwinkligen* Typus:

$$\sigma - \omega, \qquad \sigma - \omega', \qquad \sigma - \omega'', \qquad 2R - \sigma;$$

B) für den *spitzwinkligen* Typus:

$$R - (\sigma - \omega), \qquad R - (\sigma - \omega'), \qquad R - (\sigma - \omega''), \qquad \sigma - R.$$

Die Werte für den Typus B sind die Komplemente derjenigen für den Typus A.

Hinsichtlich der Beziehung zwischen drei zugeordneten *Strahlenbüscheln* ist zu bemerken, daß die Charakteristik dieser Beziehung, die im allgemeinen Fall $= \frac{1}{\varepsilon_{01}\varepsilon_{12}\varepsilon_{20}}$ ist (vergl. § 8), in der orthogonalen Verwandtschaft den Wert 1 annimmt. Es ist dies diejenige spezielle Beziehung, die wir im IV. Artikel, § 6 als *Ceva-Beziehung* gekennzeichnet haben. Gemäß der dort hervorgehobenen Eigenschaft dreier solchen Büschel betreffs der Zuordnung der Halbierungslinien ihrer Kernstrahlenwinkel — bilden, wenn x, x', x'' (vergl. Fig. 13A und 13B) die Zentren der drei Büschel sind, die Halbierungslinien der Innenwinkel an den betreffenden Ecken des Kernstrahlenvierecks — und ferner jede Halbierungslinie eines Innenwinkels mit den Halbierungslinien der Außenwinkel an den zwei anderen Ecken — ein Tripel zugeordneter Strahlen.

§ 16.

Verschiedene Orientierungsarten orthogonaler Systeme.

Fig. 14α zeigt drei orthogonale Systeme S, S', S'' in beliebiger ebener Orientierung;*) $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ sind die ihr entsprechenden Objizierungsrichtungen, durch welche das Resultantensystem R erhalten wird.

Faßt man je zwei Komponentensysteme mit der Resultanten als drei parallelprojektiv-trilineare Systeme zusammen, so befinden sich diese unter sich in einer ebenen Orientierung, die genau der Anordnung der Figuren 13A und 13B entspricht. Daher stehen sie ebenfalls in orthogonaler Verwandtschaft. Hieraus schließen wir: Können drei Systeme als Orthogonalprojektionen des nämlichen räumlichen Systems aufgefaßt werden, so wird das Gleiche auch für ihre bei ebener Orientierung erhaltene Resultante gelten. Die vier Systeme werden dann in eine solche Lage im Raum gebracht werden können, in der alle vier sich als Orthogonalprojektionen eines und desselben räumlichen Systems darstellen. Ihre Ebenen werden in dieser Lage die vier Flächen eines Tetraeders bilden, dessen sechs Kanten als

*) In Fig. 14α, und ebenso in den Figuren 15, 16 und 17 sind die Kernwinkel $\omega, \omega', \omega''$ speziell als Rechte angenommen. Dies tut der Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen keinerlei Eintrag und mag vorerst außer Berücksichtigung bleiben.

räumliche Grundschnitte zwischen je zwei Systemen von den sechs Paaren gegnerischer Kernstrahlenbüschel rechtwinklig durchschnitten werden.

In der Tat läßt sich beweisen, daß die Fig. 14α aufgefaßt werden kann als dadurch entstanden, daß von den vier Tetraederflächen die drei Flächen S, S', S'' in die als Grundfläche gedachte Fläche R durch Drehung um die Grundkanten umgelegt wurden. Und zwar erweisen sie sich in der Fig. 14α als *nach innen* umgelegt. Übersichtlicher wird die Anordnung, wenn die Seitenflächen *nach außen* umgelegt erscheinen, so daß sie zusammen mit der Grundfläche ein *Netz* des Tetraeders bilden. Dies ist in Fig. 14β der Fall, in welcher die vier Systeme nur durch die drei zugeordneten Punkte x, x', x'' nebst Resultantenpunkt X mit ihren Verknüpfungen durch Kernstrahlen und objizierende Strahlen repräsentiert sind. — Die Grundkanten und die umgelegten Seitenkanten des Tetraeders lassen sich in die Figuren 14α und 14β leicht einzeichnen: Die Grundkanten sind senkrecht zu den objizierenden Strahlen und schneiden sich auf den Linien $\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{20}$; die je zwei Umlegungen der drei Seitenkanten sind senkrecht zu je zwei gegnerischen Kernstrahlen. In Fig. 14β ist die Einzeichnung der Netzfigur ausgeführt: BCD stellt die Grundfläche des Tetraeders vor, BCa, CDa', DBa'' die Umlegungen der drei Seitenflächen. Die Dreieckswinkel der vier Tetraederflächen supplementieren die Winkel, die die Objizierungsrichtungen und Kernrichtungen mit einander bilden.

Zum Beweise des Gesagten bemerke man zunächst, daß z. B. die zwei gleich langen Umlegungen Da' und Da'' der Seitenkante DA, weil sie senkrecht zu den gegnerischen Kernstrahlen von x' und x'' sind, gleiche Winkel mit dem Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ bilden; sie werden von jedem Paar entsprechender gegnerischer Kernstrahlen in zwei Punkten geschnitten, die gleich weit von D abstehen (in der Figur durch Kreisbogen angedeutet); die Punkte a' und a'' liegen symmetrisch in bezug auf $\mathfrak{g}_{12}$; die durch sie gezogenen gegnerischen Kernstrahlen müssen sich auf $\mathfrak{g}_{12}$ schneiden. Die drei Punkte a, a', a'' müssen also ein Tripel zugeordneter Punkte bilden, von denen je zwei symmetrisch in bezug auf den zwischenliegenden Grundschnitt sind. Hiernach gestaltet sich der Beweis wie folgt:

Man beginnt die Konstruktion der Netzfigur damit, daß man ein Dreieck $a\,a'a''$ zeichnet, dessen drei Seiten die Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{20}$ zu Mittelloten haben, und zieht dann von je zwei Ecken des Dreiecks Senkrechte zu den bezüglichen gegnerischen Kernrichtungen. Die zwei Senkrechten

bilden mit dem zugehörigen Grundschnitt gleiche Winkel; sie müssen sich daher auf diesem schneiden und haben bis zum Schnittpunkt gleiche Länge. Verbindet man also die drei Schnittpunkte B, C, D, so stellen die entstandenen vier Dreiecke das Netz eines Tetraeders vor. Es bleibt jetzt nur noch zu beweisen, daß die Grundkanten BC, CD, DB senkrecht zu den objizierenden Strahlen sind. Dies kann auf folgende Weise geschehen: Man denke sich z. B. die Objizierungsrichtung von S nach der dritten in § 5 erwähnten Methode ermittelt, indem man zu den im Punkt D vereinigten zwei Punkten d', d'' den dritten zugeordneten d bestimmt und dD zieht; die gegnerischen Kernstrahlenpaare von d', d und von d'', d sind in Fig. 14β eingezeichnet. Diese letzteren vier Linien können nun in Beziehung auf die Tetraederflächen auch so gedeutet werden, daß der Punkt d den Fußpunkt der auf der Fläche BCA senkrechten Tetraeder-Höhe vorstellt, (denn diese Höhe bildet die Schnittlinie der zwei durch D senkrecht zu CA und BA gelegten Ebenen, welche die Tetraederflächen S' und S, bezw. S'' und S eben nach den genannten vier Linien schneiden). Hieraus aber folgt, daß in der Netzfigur dD senkrecht zu BC sein muß.

In dem Netze sind die vier Dreiecksflächen zunächst so angeordnet, daß das Dreieck R in der Mitte liegt und mit jedem der Dreiecke S, S', S'' eine Kante gemein hat. Nun kann man diese Anordnung durch Verschieben zweier Dreiecke (z. B. S' und S'') so ändern, daß ein anderes (z. B. S) in die Mitte zu liegen kommt und als Grundfläche des Tetraeders erscheint, in welche die Flächen R, S', S'' umgelegt sind. Die Verknüpfung der Systeme R, S', S'' unter sich und mit S durch Kernstrahlen und objizierende Strahlen ist hierbei ganz die gleiche wie vorher die Verknüpfung der Systeme S, S', S'' unter sich und mit R. Es erscheinen also jetzt R, S', S'' als Komponenten, S als Resultante. — Diese bemerkenswerte *Vertauschbarkeit* zwischen Komponenten und Resultante ist *immer* und *nur* in dem Fall vorhanden, wo alle drei Kernbüschelverhältnisse den Wert 1 haben.

Fig. 14α und 14β zeigt drei orthogonale Systeme S, S', S'' in ganz beliebiger ebener Orientierung. In Fig. 15 und Fig. 16 ist die Orientierung so eingerichtet, daß *ein* Paar gegnerischer Kernbüschel sich in Deckung befindet, und zwar in Fig. 15 dasjenige zwischen S und S', in Fig. 16 dasjenige zwischen S' und S''. Es fallen dann in Fig. 15, wie aus der angedeuteten Konstruktion ersichtlich, die objizierenden Strahlen von S und S' mit den gegnerischen Kernstrahlen zusammen; jeder Resultantenpunkt X

liegt also mit seinen zwei Komponentenpunkten x, x' in gerader Linie. Bei der Tetraeder-Orientierung aller vier Systeme fällt in Fig. 15 die Ecke, in der die Systemebenen S, S', R zusammenstoßen (entsprechend der Ecke C in Fig. 14β) ins Unendliche: Das Orientierungstetraeder degeneriert zu einem (am linken Ende offenen) dreiseitigen Prisma; die Dreiecksfläche am rechten Ende wird von der Systemebene S'' gebildet. Die Prismenkanten können senkrecht zu den Kernstrahlen und objizierenden Strahlen leicht eingezeichnet werden.*) Die Flächen S, S', S'' erscheinen in die Fläche R (wie in Fig. 14α) *nach innen* umgelegt. — Analoges gilt für Fig. 16.

In Fig. 17 endlich befinden sich *zwei* Paare gegnerischer Kernbüschel in Deckung, nämlich diejenigen zwischen S und S' und zwischen S und S'', übereinstimmend mit dem Schema der Fig. 13A und 13B. Es fallen jetzt die objizierenden Strahlen von x' und x'' mit den Kernstrahlen $x'x$ und $x''x$ zusammen, der objizierende Strahl von x reduziert sich auf einen Punkt, die Resultante R fällt mit S zusammen. Bei der Tetraeder-Orientierung fallen die zwei Ecken $SS'R$ und $SS''R$ (entsprechend den Ecken C und B in Fig. 14β) ins Unendliche; die Flächen S und R werden parallel.

§ 17.

Die einzelkernig-orthogonale Verwandtschaft.

Die durch Fig. 15 und Fig. 16 veranschaulichte Art der Orientierung bietet noch insofern besonderes Interesse, als in Fig. 15 die drei Systeme S, S', R —, in Fig. 16 S', S'', R in *einzelkerniger* Verwandtschaft stehen.

Die Bedingungen (4α) und (4β) (vergl. § 10), durch welche die einzelkernige Verwandtschaft gekennzeichnet ist, ist mit den Definitionsgleichungen (7.) der orthogonalen Verwandtschaft verträglich. Daher besitzt ihr stumpfwinkliger Typus eine einzelkernige Ausartung. Indessen darf hieraus nicht gefolgert werden, daß drei einzelkernige Systeme unter der Voraussetzung des Zutreffens der Bedingungsgleichungen (7.) ohne weiteres als Orthogonalprojektionen eines räumlichen Systems aufgefaßt werden können. Vielmehr ergibt sich, daß jene Bedingung zwar notwendig, aber nicht ausreichend ist.

---

*) Die Objizierungsrichtung von S'' ist im allgemeinen nicht senkrecht zu xx', wie es in Fig. 15 zufolge der speziellen Annahme der Kernwinkel als Rechte der Fall ist. Daher wird auch im Orientierungsprisma die Dreiecksfläche S'' im allgemeinen nicht senkrecht zu den parallelen Prismenkanten.

Denn sollen bei räumlicher Orientierung der drei einzelkernigen Systeme die objizierenden Strahlen eines Punktetripels senkrecht zu den betreffenden Systemebenen sein, so muß auch die gemeinsame Kernebene, in der die drei Strahlen liegen, senkrecht zu den Systemebenen — und folglich auch senkrecht zu deren drei Schnittlinien sein; diese Schnittlinien müssen also unter sich parallel sein. Eine orthogonale Orientierung ist somit nur mit parallelen Grundschnitten möglich. Der Scheitelpunkt fällt dann ins Unendliche. Da aber im Scheitelpunkt ein Tripel zugeordneter Punkte vereinigt ist, so folgt weiter, daß die *zu den Kernstrahlen rechtwinkligen Richtungen einander zugeordnet sein müssen*, oder: daß die in § 12 eingeführten drei „Sextupelwinkel“ Null sein müssen. Nur beim Hinzutreten dieser weiteren Bedingung zu den Bedingungsgleichungen (7.) sind die drei Systeme einer räumlich-orthogonalen Orientierung fähig und können demgemäß als in einzelkernig-orthogonaler Verwandtschaft stehend bezeichnet werden.

Wir haben im IV. Artikel, § 9 die Beziehung zwischen drei einzelkernig-trilinearen Strahlenbüscheln, deren rechtwinklige Strahlen einander zugeordnet sind, als *Poncelet-Beziehung* gekennzeichnet. Es folgt also, daß in der einzelkernig-orthogonalen Verwandtschaft je drei zugeordnete Strahlenbüschel in der *Poncelet*-Beziehung stehen. Sie bildet für die einzelkernige Verwandtschaft das Analogon zu der *Ceva*-Beziehung der doppelkernigen Verwandtschaft (vergl. § 15, letzten Absatz).

Bringt man die drei Systeme in beliebige ebene Orientierung (nach dem Schema der Fig. 10α), so erkennt man sofort, daß die drei zugeordneten rechtwinkligen Richtungen zugleich *ausgezeichnete* Richtungen mit kongruenten zugeordneten Punktreihen sind. Bei Anwendung der Konstruktion des § 7 auf den vorliegenden Fall ergibt sich, daß die Geradenpaare, zu denen die dort benutzten Hyperbeln degenerieren, jetzt ihren Kreuzungspunkt gemein haben, daß also die vier ausgezeichneten Richtungstripel zusammenfallen in ein einziges, dessen Richtungen senkrecht zu den Kernstrahlen sind.

Soll zwischen drei gegebenen einzelkernig-orthogonalen Systemen eine räumlich-orthogonale Orientierung hergestellt werden,*) so bemerke man,

*) Sind in den Figuren 15 und 16 alle vier Systeme S, S', S'', R gegeben, so erfolgt die räumlich-orthogonale Orientierung der drei einzelkernigen Systeme natürlich durch Einzeichnen der Kanten des Orientierungsprismas senkrecht zu den Kernstrahlen und objizierenden Strahlen. — Hier setzen wir aber voraus, es seien *nur* die drei einzelkernigen Systeme gegeben.

daß bei solcher Orientierung die in jeder Kernebene enthaltenen drei trilinearen Punktreihen so liegen müssen, daß ihre Objizierungsrichtungen zu den Punktreihen senkrecht sind. Ist dies bei einer Kernebene der Fall, so trifft es für alle zu. Es handelt sich also nur darum, ein einziges Punktreihentripel in die genannte Lage zu bringen. Daß diese Aufgabe auf die Konstruktion eines Dreiecks aus drei Sextupelstrecken als Höhen hinausläuft, wurde bereits in § 11 (S. 125) erwähnt. Unabhängig hiervon gelangen wir durch folgende Betrachtung zur Lösung.

Wir gehen von einer ebenen Orientierung aus, bei der sich die drei kongruenten Kernstrahlenbüschel in Deckung befinden, wie dies z. B. in Fig. 15 und Fig. 16 betreffs der Systeme S, S', R, bezw. S', S'', R der Fall ist. Auf je drei sich deckenden Kernstrahlen bilden dann die zugeordneten Punkte drei ineinanderliegende parallelprojektiv-trilineare Punktreihen. Diese besitzen einen und nur einen Punkt G, in dem drei zugeordnete Punkte zusammenfallen. Denn zu seiner Bestimmung liefert die Relation (5.) (vergl. § 11), wenn man in ihr die Punkte x, x', x'' zusammenfallen läßt, eine lineare Gleichung. Man kann die drei Systeme gleich zu Anfang so legen, daß ein bestimmtes Punktetripel in einem bestimmten Punkte G vereinigt liegt mit sich deckenden Kernstrahlen. — Durch jedes Punktetripel gehen nun drei zu dem gemeinsamen Kernstrahl senkrechte zugeordnete Gerade, die von den übrigen Kernstrahlen nach kongruenten zugeordneten Punktreihen geschnitten werden. In der Senkrechten $\mathfrak{g}$ durch den Punkt G fällt ein solches Geradentripel zusammen. Die drei Systeme befinden sich demnach in ebener Orientierung mit zusammenfallenden Grundschnitten. (In Fig. 15 gibt sich die Linie $\mathfrak{g}_{01}$, in Fig. 16 — $\mathfrak{g}_{12}$ als dieser gemeinsame Grundschnitt zu erkennen.) — Um nun von hier aus zunächst zu einer räumlich-orthogonalen Orientierung mit dem gemeinsamen Grundschnitt $\mathfrak{g}$ zu gelangen, hält man eine Systemebene fest und dreht die zwei andern um $\mathfrak{g}$ so lange, bis die Senkrechten, die in je drei zugeordneten Punkten auf den betreffenden Systemebenen errichtet werden, sich im nämlichen Punkt schneiden. Dies ist der Fall, sobald es für die Punkte eines einzigen Punktreihentripels $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'\mathfrak{l}''$ zutrifft. Hierzu aber genügt es, daß die Forderung für ein Sextupel zugeordneter Punkte, durch das die Punktreihen bestimmt sind, erfüllt werde. Man ergänzt demgemäß das in dem Punkt G vereinigte Punktetripel zu einem Sextupel $a_{12}a'_{23}a''_{31}$, $a_3 a'_1 a''_2$, indem man (vergl. Fig. 18) die in G liegenden drei Punkte etwa durch a_{12}, a'_1, a''_{31} bezeichnet, den Punkt a'_{23} beliebig wählt

und zu a_{12}, a'_{23}, sowie zu a'_{23}, a''_{31} die dritten zugeordneten a''_2 bezw. a_3 bestimmt. Nunmehr sind die zwei Punktreihen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ durch Drehung um den Punkt G in solche Lage zur festgehaltenen Punktreihe $\mathfrak{l}$ zu bringen, daß sich ihre Senkrechten durch die Punkte a_{12}, a'_{23}, a''_2 im nämlichen Punkt A_2, und ihre Senkrechten durch die Punkte a_3, a'_{23}, a''_{31} im nämlichen Punkt A_3 schneiden. Ein Blick auf Fig. 18 zeigt, daß dann in dem Dreieck $G A_2 A_3$ die Höhen gleich den drei Sextupelstrecken sind. Zeichnet man also dieses Dreieck aus seinen Höhen, und zwar in solcher Stellung, daß die Seite $G A_2$ senkrecht zu $\mathfrak{l}$ ist, so erhält man die gewünschte Lage der drei Punktreihen. Die Linie $\mathfrak{g}$ steht im Punkt G senkrecht zu der Dreiecksebene. Die drei Systeme, deren Ebenen durch $\mathfrak{g}$ und die drei Linien $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ gehen, befinden sich jetzt in räumlich-orthogonaler Orientierung mit gemeinschaftlichem Grundschnitt $\mathfrak{g}$. Verschiebt man eine Systemebene in zu ihr senkrechter Richtung beliebig, so erhält man eine Orientierung mit getrennten Grundschnitten.

Aus der vorstehenden Betrachtung folgt, daß die einzelkernig-orthogonale Verwandtschaft bestimmt ist durch die Verhältnisse dreier Sextupelstrecken. Indessen bestehen für die Ausführbarkeit der räumlich-orthogonalen Orientierung und demgemäß für die Möglichkeit, die drei Systeme als Orthogonalprojektionen aufzufassen, gewisse Grenzen. Die bekannte Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Höhen (das Dreieck, das $h, h', \frac{hh'}{h''}$ zu Seiten hat, ist ihm ähnlich) liefert hierfür die Bedingung: Von den drei Produkten aus je zwei Sextupelstrecken muß jedes kleiner sein als die Summe der zwei andern. Trifft diese Bedingung nicht zu, so sind die drei Systeme pseudoorthogonal.

§ 18.

Die Mongesche Verwandtschaft.

Wir wenden uns nunmehr zu der Frage, unter welchen Umständen bei drei orthogonalen Systemen, die sich räumlich-orthogonal orientieren lassen, die Möglichkeit besteht, daß diese Orientierung eine *Mongesche Orientierung* ist, das heißt: eine solche, bei welcher der Flächenwinkel zwischen zwei Systemebenen, z. B. S und S', ein Rechter ist.

Bei dem spitzwinkligen Verwandtschaftstypus B sind nach den Ausführungen des § 15 (S. 138 u. f.) die Seiten des Orientierungsdreikants entweder

alle drei stumpf, oder eine stumpf, die zwei andern spitz. Da nun aber in einem rechtwinkligen Dreikant stumpfe Seiten nur in der Zahl 2 vorkommen können, so ist die Möglichkeit einer *Monge*schen Orientierung beim Typus B von vorn herein ausgeschlossen. *Daher spielt der Typus B in der Darstellenden Geometrie von Monge überhaupt keine Rolle.*

Beim stumpfwinkligen Verwandtschaftstypus A sind die Seiten des Hauptorientierungsdreikants (vergl. Fig. 13 A) gleich den spitzen Kernwinkeln $\omega, \omega', \omega''$. Daher ist die Möglichkeit einer *Monge*schen Orientierung vorhanden und ist, falls der Winkel zwischen den Systemebenen S und S' ein Rechter werden soll, durch die Beziehung bedingt:

$$\text{(9.)} \qquad \cos\omega \cos\omega' = \cos\omega''.$$

Eine orthogonale Verwandtschaft, die eine *Monge*sche Orientierung zuläßt, nennen wir *Mongesche Verwandtschaft.* Sie gehört einer durch die Beziehungen (7.) und (9.) gekennzeichneten Unterart des stumpfwinkligen Typus der orthogonalen Verwandtschaftsgattung an und ist durch 2 Kernwinkel bestimmt.

Konstruktiv kann die Beziehung (9.) so ausgedrückt werden (vergl. Fig. 13 A): Fällt man $H'U \perp \mathfrak{g}_{01}$, so muß $UH'' \perp \mathfrak{g}_{02}$ sein. Denn wird $\mathfrak{g}_{02}$ von UH'' in V geschnitten, so ist:

$$\cos\omega \cos\omega' = \frac{OV}{OU}\,\frac{OU}{OH'} = \frac{OV}{OH''} = \cos\omega''.$$

In Fig. 13 A wurde die Wahl der Kernwinkel stillschweigend dieser Bedingung gemäß getroffen. Die Deutung der Fig. 13 A im Sinne der *Monge*schen Grund- und Aufriß-Methode ergibt sich ohne weiteres: $\mathfrak{g}_{01}$ ist die Projektionsachse, x, x' bedeuten die Grund- und Aufriß-Projektionen eines Raumpunktes, $\mathfrak{g}_{02}$ und $\mathfrak{h}'_{12}$ die Spurlinien einer dritten Projektionsebene, xG_{02} und $x'H'$ die Projektionen des zu ihr senkrechten projizierenden Strahls. H'' stellt die Umklappung des Punktes H' in die Grundrißebene vor, folglich $\mathfrak{h}''_{12}$ die Umklappung der Spurlinie $\mathfrak{h}'_{12}$, und x'' die Umklappung der dritten Projektion des Punktes x, x'.

Es bedarf keiner weiteren Erläuterung, wie die Konstruktion der Fig. 13 A und damit die Herstellung der *Monge*schen Orientierung auszuführen ist, falls 2 Kernwinkel, z. B. ω und ω', gegeben sind.

Eine Vereinfachung ist noch dadurch möglich, daß die Punkte x, x' zusammenfallend auf dem Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ angenommen werden. Dies ist in Fig. 19 geschehen: Es sind auf $\mathfrak{g}_{01}$ die Punkte $[x, x']$ und O beliebig gewählt, — durch $[x, x']$ die zu $\mathfrak{g}_{01}$ senkrechten Kernstrahlen, und unter den gegebenen Kernwinkeln ω und ω' die zwei anderen Kernstrahlen von S und S' gezogen, hierauf senkrecht zu diesen durch O die Linien $\mathfrak{g}_{02}$ und $\mathfrak{h}'_{12}$ gezeichnet. Weiter ist $H'U \perp \mathfrak{g}_{01}$, und $UV \perp \mathfrak{g}_{02}$ gefällt, — UV durch einen Kreis aus O mit dem Halbmesser OH' in H'' geschnitten und $\mathfrak{h}''_{12}$ als Verbindungslinie von O mit H'' gezogen. Endlich ist durch H'' der zu $\mathfrak{h}''_{12}$ senkrechte Kernstrahl gezogen, welcher den anderen Kernstrahl von S'' in x'' schneidet. — Zur Veranschaulichung der praktischen Verwendung der Konstruktion zeigt Fig. 19 in ihrer weiteren Ausführung die Bildbestimmung eines axonometrischen Dreibeins für eine durch die Winkel ω, ω' gegebene Sehrichtung $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$.*)

Soll außer dem Dreikant-Winkel zwischen S und S' noch ein zweiter, z. B. derjenige zwischen S und S'', ein Rechter sein, so müssen auch die gegenüberliegenden Dreikant-Seiten, die bezw. $= \omega''$ und ω' sind, Rechte werden. Man hat dann das aus Grundriß und zwei verschiedenen Aufrissen bestehende *Monge*sche Projektionssystem.

Sollen endlich alle drei Dreikant-Winkel Rechte sein, so müssen auch alle drei Dreikant-Seiten Rechte —, es muß also:

$$\omega = \omega' = \omega'' = R \tag{10.}$$

sein. Durch die vereinigten Bedingungen (7.) und (10.) ist die spezielle Verwandtschaftsform definiert, die zwischen Grundriß, Aufriß und Seitenriß der *Monge*schen Projektionsmethode besteht; wir bezeichnen sie als *Mongesche Drei-Tafel-Verwandtschaft.*

Die Figuren 14α, 15, 16 und 17 zeigen drei dieser Spezialverwandtschaft angehörige Systeme S, S', S'' in verschiedenen ebenen Orientierungen,

---

*) Betreffs der Anordnung der Fig. 19 sei noch bemerkt: Die Systemebene S'' ist in die Ebene S nach außen (rechts) umgelegt. Die Figur stellt also das Netz des Hauptorientierungsdreikants dar. Dem entsprechend ist der Richtungspfeil des Sehstrahls $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ nach rechts zielend gezeichnet. Bei entgegengesetztem Sinn des Richtungspfeiles wäre S'' nach innen (links) umzulegen, so daß seine Lage zu derjenigen der Fig. 19 symmetrisch in bezug auf $\mathfrak{g}_{02}$ wäre. (Die Figur würde dann das Netz des Nebendreikants mit den Seiten $2R-\omega$, $2R-\omega'$, ω'' vorstellen.)

Orientierungsprismas können senkrecht zu den objizierenden Strahlen und Kernstrahlen leicht in die Figur eingezeichnet werden. Ändert man dann gemäß den Ausführungen des § 16 die Verknüpfung der vier Flächen in der Art, daß die Dreiecksfläche S in die Mitte zu liegen kommt, und daß sich an sie die drei Flächen S', S'', R ansetzen, so stellt der Grundriß S die Resultante vor, die drei Aufrisse S', S'', R erscheinen als Komponenten, alle drei umgelegt in die Grundrißebene. Die drei einzelkernigen Systeme S', S'', R befinden sich dann in einer ebenen Orientierung, die dem Schema der Fig. 10α entspricht, mit Objizierungsrichtungen senkrecht zu den Kernstrahlen.*)

Die drei Sextupelstrecken, durch deren Verhältnisse die einzelkernig-orthogonale Verwandtschaft bestimmt ist (vergl. § 17, letzten Abs.), sind in dem Sonderfall der einzelkernig-*Monge*schen Verwandtschaft nicht mehr von einander unabhängig, sondern es besteht jetzt zwischen ihnen die Beziehung, daß sie die Katheten und die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks bilden müssen. Denn da sie bei räumlich-orthogonaler Orientierung mit zusammenfallenden Grundschnitten parallel und gleich den Höhen eines Dreiecks $G A_2 A_3$ (vergl. Fig. 18) sind, so müssen, wenn zwei Punktreihen einen rechten Winkel einschließen sollen, auch die betreffenden Höhen einen rechten Winkel bilden, das heißt: das Dreieck muß rechtwinklig werden. Die drei Sextupelstrecken werden dann gleich seinen Katheten und seiner Höhe. Die Verwandtschaft ist demnach schon durch das Verhältnis *zweier* Sextupelstrecken bestimmt.

§ 19.

Die komplanare Verwandtschaft.

Eine andere Unterart der orthogonalen Verwandtschaft, die besonderes Interesse beansprucht, wird durch die Beziehung bedingt:

$$\sin(\omega^{(i)} + \omega^{(k)}) = \sin \omega^{(l)}, \tag{12.}$$

mit der Maßgabe, daß für die zwei verschiedenen Verwandtschaftstypen A und B getrennt gelten soll:

$$\omega^{(i)} + \omega^{(k)} = \omega^{(l)}, \tag{12A}$$

$$\omega + \omega' + \omega'' = 2R. \tag{12B}$$

*) Der von Grund aus verschiedene Charakter der einzelkernigen und der doppelkernigen Verwandtschaft scheint in der Darstellenden Geometrie bisher kaum bemerkt worden zu sein.

Fassen wir die Beziehung zuerst in ihrer zweiten Spezialform (12B) ins Auge, so bringt diese für den stumpfwinkligen Verwandtschaftstypus A keine wesentlichen Besonderheiten mit sich. Die Möglichkeit der räumlich-orthogonalen Orientierung wird dadurch nicht beeinträchtigt. Zum anschaulichen Beleg hierfür wurden in Fig. 19 die drei Kernwinkel stillschweigend der Bedingung (12B) entsprechend gewählt. Es hat dies nur den belanglosen Umstand zur Folge, daß dann $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ in die nämliche Gerade fallen.

Dagegen geht für den spitzwinkligen Verwandtschaftstypus B mit der Bedingung (12B) die Möglichkeit der orthogonalen Orientierung verloren. Denn sie widerspricht der hierfür in § 15 (S. 139) als notwendig erkannten Bedingung (8B).

Gehen wir von der durch Fig. 13B veranschaulichten ebenen Orientierung aus, so degeneriert das Kernstrahlenviereck $x x' x'' G_{12}$, falls die drei Kernwinkel zusammen $2R$ ausmachen, zu einem Dreieck. Auch das dritte Paar gegnerischer Kernbüschel kann zur Deckung gebracht werden. Die einzelnen Tripel zugeordneter Punkte $x x' x''$, $y y' y''$, ... bilden dann die Ecken von lauter ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken, wie dies Fig. 20 veranschaulicht.

Weiter folgt: Fallen von drei zugeordneten Punkten x, x', x'' zwei zusammen, so fällt auch der dritte mit ihnen zusammen. In jedem Punkt der Ebene liegt also ein Tripel zugeordneter Punkte vereinigt. Was die Grundschnitte anlangt, so wird jetzt auch der Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ der Fig. 13B unbestimmt. Man kann irgend einen beliebigen Punkt der Ebene als Scheitelpunkt — und drei beliebig durch ihn gezogene Linien als Grundschnitte wählen. Oder es können auch die drei Grundschnitte in einer beliebigen Geraden zusammenfallend angenommen werden.

Die Herstellung einer räumlichen Orientierung von der ebenen Orientierung mit beliebigen Grundschnitten aus erfolgt wie im allgemeinen Fall und bietet keine Besonderheiten dar. Die drei Systeme erscheinen dann als schiefe Parallelprojektionen eines räumlichen Systems.

Nun kann man aber hier, wo jede beliebige Gerade der Ebene als gemeinsamer Grundschnitt genommen werden kann, diesen gemeinsamen Grundschnitt auch *ins Unendliche* verlegen. Tut man dies, so sind die Systemebenen behufs Herstellung einer räumlichen Orientierung durch Parallelverschiebung von zweien nach verschiedenen Richtungen zu trennen. Ist dann $x x' x''$ irgend ein Punktetripel, und legt man durch je zwei (parallele)

gegnerische Kernstrahlen die Kernebenen, so schneiden sich diese nach den drei objizierenden Strahlen $xX, x'X, x''X$. Da für verschiedene Punktetripel die gleichartigen Kernebenen unter sich parallel sind, so sind auch die gleichartigen objizierenden Strahlen unter sich parallel. Die drei Systeme stellen sich also als verschiedene Parallelprojektionen eines räumlichen Systems auf drei *parallele* Projektionsebenen dar.

Beläßt man die drei Systeme in ihrer ursprünglichen Lage in derselben Ebene, so können sie in dieser Lage als verschiedene Parallelprojektionen eines räumlichen Systems auf drei *zusammenfallende* Projektionsebenen aufgefaßt werden. Dabei sind die Objizierungsrichtungen zunächst unbestimmt. Zu irgend einem Punktetripel $xx'x''$ kann der zugehörige Objektpunkt X willkürlich angenommen werden. Dadurch sind dann die Objizierungsrichtungen bestimmt. Denn die durch jedes andere Punktetripel parallel zu $xX, x'X, x''X$ gezogenen Strahlen schneiden sich ebenfalls in einem und demselben Punkt. Die einzelnen Punktetripel bilden mit ihren Objektpunkten die Ecken von lauter ähnlichen und ähnlich liegenden Tetraedern.

Der Objektpunkt X kann auch in der gemeinsamen Systemebene selbst angenommen werden, wodurch man zu einer ebenen Objektivierung gelangt (vergl. Fig. 20).

Mit Rücksicht auf die Auffassung der drei Systeme als Projektionen auf drei zusammenfallende Projektionsebenen bezeichnen wir die bezügliche Art der Orientierung als *komplanare Orientierung* und nennen eine Verwandtschaft, die eine solche zuläßt, eine *komplanare Verwandtschaft.*

Wenden wir uns nunmehr zur Betrachtung des stumpfwinkligen Verwandtschaftstypus A. Drei diesem Typus angehörige orthogonale Systeme können dann, wenn zwischen ihren Kernwinkeln die Beziehung (12 A) besteht, nicht mehr räumlich-orthogonal, wohl aber komplanar orientiert werden.

Denn legt man in Fig. 13 A die zwei Systeme S' und S'' in die Ebene S durch Drehung um $\mathfrak{g}_{01}$ bezw. $\mathfrak{g}_{02}$ nach innen um, so daß ihre neue Lage symmetrisch zur alten in bezug auf $\mathfrak{g}_{01}$ bezw. $\mathfrak{g}_{02}$ wird, so erhält man eine der in § 15 genannten anderen Anordnungen des Kernstrahlenvierecks; und zwar diejenige, bei welcher die Innenwinkel an den Ecken x' und x'' gleich den spitzen Kernwinkeln ω' und ω'' sind. Ist dann $\omega = \omega' + \omega''$, so wird das dritte Paar gegnerischer Kernstrahlen parallel und kann durch Parallelverschiebung des Systems S' oder S'' zum Zusammenfallen gebracht

Objizierungsrichtungen ergeben, sich in affiner Lage in bezug auf die gegemeinsame Systemebene als Affinitätsebene befinden: Je zwei entsprechende Objektgerade schneiden sich im nämlichen Punkt der gemeinsamen Systemebene, und je zwei entsprechende Objektpunkte liegen auf parallelen Strahlen. — Für eine ebene Objektivierung kann jedes Tripel zugeordneter Richtungen als objizierendes Richtungstripel gewählt werden. — Die Vertauschbarkeit zwischen Komponenten und Resultante trifft auch hier wie in der allgemeinen orthogonalen Verwandtschaft zu.

Was die *ausgezeichneten Geradentripel* mit kongruenten zugeordneten Punktreihen anlangt, so liegen bei komplanarer Orientierung in jeder beliebigen Geraden der gemeinsamen Systemebene drei kongruente zugeordnete Punktreihen vereinigt. Jedes zu der Geraden parallele Geradentripel ist also ein ausgezeichnetes Tripel; bei räumlicher Objektivierung ist die zugehörige Objektgerade parallel zur gemeinsamen Systemebene. Zu diesen ∞^1 ausgezeichneten Richtungstripeln mit unter sich parallelen Einzelrichtungen kommt noch eins mit nicht parallelen Einzelrichtungen. Die letzteren ergeben sich als Verbindungslinien der Ecken irgend eines Kernstrahlendreiecks mit dem Mittelpunkt seines umbeschriebenen Kreises (vergl. Fig. 20, in welcher $\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}'\,\mathfrak{l}''$ ein solches ausgezeichnetes Geradentripel vorstellt).

Der stumpfwinklige Typus der komplanaren Verwandtschaft besitzt eine *einzelkernige Ausartung;* denn die Gleichungen (7.) und (12 A) sind mit (4α) und (4β) verträglich. Bei komplanarer Orientierung degenerieren die stumpfwinkligen Kernstrahlendreiecke zu einer Schar von parallelen Linien. Die Objizierungsrichtungen werden wieder dadurch bestimmt, daß zu irgend einem Punktetripel der zugehörige Objektpunkt willkürlich gewählt wird. Aus der Bestimmung von Punktetripeln mittels der objizierenden Strahlen folgt dann, daß je drei zugeordnete Punkte auf ihrem gemeinsamen Kernstrahl so liegen, daß das Verhältnis ihrer Abstände konstant ist.*) — Drei zugeordnete *Strahlenbüschel* stehen in der speziellen Beziehung, wie sie bereits in § 11 unter der Bezeichnung *Poncelet-Beziehung besonderer Art*

*) Um diese höchst einfache Beziehung durch ein Beispiel zu veranschaulichen, projiziere man etwa eine Schraubenlinie parallel mit ihrer Achsenrichtung sowie mit zwei verschiedenen, in einer Achsenebene liegenden, schiefen Richtungen auf eine zur Achse senkrechte Ebene. Man erhält dann als Projektionen einen Kreis und zwei verschiedene Zykloiden, deren Punkte in der angegebenen Weise einzelkernig-komplanar auf einander bezogen sind.

erwähnt wurde: Die Zentren liegen in gerader Linie, und je drei Strahlen, die sich im nämlichen Punkte schneiden, sind einander zugeordnet. — Die drei Sextupelstrecken, durch deren Verhältnisse die einzelkernig-orthogonale Verwandtschaft bestimmt ist (vergl. § 17, letzten Abs.), sind jetzt nicht mehr von einander unabhängig; es besteht vielmehr die Beziehung, daß von den drei Produkten aus je zwei Sextupelstrecken eins gleich der Summe der zwei andern ist. Dies ergibt sich leicht, wenn man bei komplanarer Orientierung ein in einem Punkt vereinigtes Punktetripel zu einem Sextupel ergänzt und die Gleichheit des Abstandsverhältnisses je dreier Punkte, die ein Tripel bilden, in Rücksicht zieht.*) — Aus dieser Beziehung — verglichen mit der Bedingung für die orthogonale Orientierbarkeit dreier einzelkernigen Systeme (s. § 17, letzten Abs.) — folgt, daß es auch bei der einzelkernigen Verwandtschaft ausgeschlossen ist, daß die nämlichen drei Systeme zugleich als Orthogonalprojektionen und als komplanare Projektionen aufgefaßt werden könnten.

Die komplanare Verwandtschaft bildet den parallelprojektiven Spezialfall der einfachsten Form der zentralprojektiv-trilinearen Verwandtschaft, welche auf die *Desarguessche Konfiguration* hinausläuft.**) Sie stellt unter den parallelprojektiven Verwandtschaften die einfachste Form vor. Jede andere (doppelkernige oder einzelkernige) Form kann auf sie zurückgeführt oder aus ihr abgeleitet werden durch affine Transformation eines oder zweier Systeme. Mittels kollinearer Transformation läßt sich jede zentralprojektiv-trilineare Verwandtschaft auf sie zurückführen. Auch bei Detailkonstruktionen, die sich auf andere Verwandtschaftsformen beziehen, kann man sich

---

*) Damit ist auch der Beweis für die in § 11 (S. 121) ausgesprochene Bemerkung erbracht, daß drei allgemeine parallelprojektiv-trilineare Punktreihen in paralleler Lage nicht orientiert sind. Denn projiziert man die Punkte einer Ebene auf drei in ihr liegende parallele Gerade parallel zu drei beliebigen Richtungen und verschiebt dann zwei Punktreihen parallel zu ihren Projizierungsrichtungen, bis sie mit der dritten zusammenfallen, so erscheinen die drei Punktreihen in dieser Lage als drei einzelkernig-komplanare Punktreihen in komplanarer Orientierung. Durch dreifältige Parallelprojektion der Punkte einer Ebene auf drei in ihr liegende parallele Gerade können also nur drei parallelprojektiv-trilineare Punktreihen von der genannten besonderen Art, nicht aber solche von allgemeiner Beschaffenheit erzeugt werden.

**) Siehe: Theorie der trilin. Verw. III. Art., § 9 und V. Art., § 5. Dieses Journal, Bd. 98, S. 331 u. flg., und Bd. 111, S. 228 u. flg.

vielfach mit Vorteil ihrer Vermittelung bedienen. Dies ist z. B. bei unseren Strahlenbüschelkonstruktionen in § 8 (S. 113 u. flg.) und § 11 (S. 126 u. flg.) vorgreifend geschehen.*)

§ 20.

Militärperspektive und Kavalierperspektive in ihrer Beziehung zu Grundriß und Aufriß.

Wir setzen nunmehr fest, es seien nur *zwei* Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel, z. B. diejenigen zwischen S und S' und zwischen S und S'', je unter sich kongruent, es sei also:

$$(13.)\qquad \varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 1.$$

Die übrigen Bestimmungselemente ε_{12}, ω, ω', ω'' mögen irgendwelche gegebene Werte haben.

Wir gehen wieder, wie in § 15, von der einfachsten ebenen Orientierung aus, bei welcher sich die zwei Paare kongruenter gegnerischer Kernbüschel in Deckung befinden. $x\,x'\,x''\,G_{12}$ (siehe Fig. 21) sei das durch ein Tripel zugeordneter Punkte gebildete Kernstrahlenviereck, das aus den gegebenen Kernwinkeln $\omega, \omega', \omega''$ gezeichnet wird. Der durch den Punkt G_{12} gehende Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ halbiert aber jetzt nicht mehr den Winkel bei G_{12}, sondern ergibt sich dadurch, daß man irgend einen Punkt O, der von den gegnerischen Kernstrahlen $G_{12}x'$ und $G_{12}x''$ ein Abstandsverhältnis gleich dem gegebenen Kernbüschelverhältnis ε_{12} hat, mit G_{12} verbindet. — Die zwei anderen Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$ sind unbestimmt und werden am einfachsten senkrecht zu xx' und xx'' durch den auf $\mathfrak{g}_{12}$ beliebig gewählten Scheitelpunkt O angenommen.

In der gleichen gegenseitigen Lage, wie sie in Fig. 21 zwischen den drei Systemen S, S', S'' besteht, befindet sich bei einer ganz allgemeinen Verwandtschaft, deren Systeme in beliebige ebene Orientierung gebracht sind, die Resultante mit je zwei Komponenten.

Um von der ebenen Orientierung aus eine räumliche Orientierung herzustellen, durchschneidet man die Kernstrahlen $x'G_{12}$ und $x''G_{12}$ durch einen Kreisbogen von beliebigem Halbmesser aus O in H' und H'' und nimmt die

*) Vergl. auch meinen Aufsatz: „Über uneigentliche Projektionen" in den Sitzungsberichten der Berliner Math. Ges., I. Jahrg. 1902, S. 34.

Linien OH' und OH'' als Aufschnitte $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ des dritten Grundschnitts $\mathfrak{h}_{12}$. Werden alsdann die Systemebenen zu einem Dreikant O, $\mathfrak{g}_{01}\,\mathfrak{g}_{02}\,\mathfrak{h}_{12}$ zusammengefügt und die objizierenden Strahlen von x, x', x'' als Schnittlinien der drei Kernebenen bestimmt, so erscheinen: S als Orthogonalprojektion, S' und S'' als schiefe Parallelprojektionen mit Projizierungsrichtungen, die bezw. zu $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$ rechtwinklig sind.

Eine *Mongesche Orientierung* in bezug auf zwei Systeme, z. B. S und S' ist ohne weiteres nicht herstellbar. Sie erheischt, daß 1) der Flächenwinkel an der Kante $\mathfrak{g}_{01}$ ein Rechter —, und daß 2) der objizierende Strahl von x' senkrecht zu S' sei. Das erstere läßt sich ohne weiteres erreichen, nicht aber das letztere.

Damit der Flächenwinkel bei $\mathfrak{g}_{01}$ ein Rechter sei, muß wieder (vergl. die bezüglichen Ausführungen in § 18), wenn $H'U \perp \mathfrak{g}_{01}$ gefällt wird, $UH'' \perp \mathfrak{g}_{02}$ sein. Dies kann auf folgende Weise bewirkt werden: Verlängert man $G_{12}x'$, bis sie $\mathfrak{g}_{01}$ in J schneidet, und zieht durch J die Senkrechte zu $\mathfrak{g}_{01}$, welche $\mathfrak{h}'_{12}$ in K' schneidet, ferner durch J die Senkrechte zu $\mathfrak{g}_{02}$, welche $\mathfrak{h}''_{12}$ in K'' schneidet, so ist: $\frac{OK'}{OH'} = \frac{OJ}{OU} = \frac{OK''}{OH''}$, folglich: $OK' = OK''$. Man kann sich im Punkt J zwei zugeordnete Punkte der Systeme S und S' vereinigt denken; der dritte zugeordnete Punkt i'' fällt dann in den Schnittpunkt von JK'' und $G_{12}x''$. Denkt man sich nun noch $i''O$ gezogen und faßt die zwei Strahlenbüschel $J, OH'K'$ und $i'', OH''K''$ ins Auge, so hat man durch O die zwei Linien $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ so zu ziehen, daß sie von den zwei Strahlenbüscheln nach kongruenten Punktreihen $OH'K'$ und $OH''K''$ geschnitten werden.*)

Was weiterhin die Forderung der orthogonalen Richtung des objizierenden Strahls von x' anlangt, so liegt dieser Strahl, nachdem die Punkte H' und H'' auf der Kante $\mathfrak{h}_{12}$ in H vereinigt sind, in der durch die Kernstrahlen Hx' und Hx'' gehenden Kernebene. Verlängert man also diese Kernstrahlen, bis sie die Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$ bezw. in J und L schneiden, und zieht JL, so ist JL die Schnittlinie der Kernebene mit der Ebene S. Soll nun der objizierende Strahl von x' senkrecht zur Ebene S' sein, so muß auch die Kernebene senkrecht zu S' sein. Da aber gleichzeitig die Ebene S senkrecht zu S' sein soll, so muß auch die Schnittlinie JL senk-

*) Für diese Aufgabe habe ich eine einfache Lösung angegeben in: Theorie der trilin. Verw., II. Art., § 1. Siehe dieses Journal, Bd. 97, S. 263 u. flg.

recht zu S', und also senkrecht zu $\mathfrak{g}_{01}$ sein. Dies ist in der Anordnung der Fig. 21 stillschweigend vorgesehen worden, trifft aber im allgemeinen nicht zu, sondern wird durch eine gewisse Beziehung zwischen den Bestimmungselementen $\varepsilon_{12}, \omega, \omega', \omega''$ bedingt, die sich leicht aus Fig. 21 ergibt:

Bezeichnet man die Abstände des Scheitelpunktes O von den zwei Kernstrahlen $G_{12}x'$ und $G_{12}x''$ vorübergehend mit q' und p'', so ist

$$\varepsilon_{12} = \frac{q'}{p''} = \frac{OJ \cos \omega'}{OL \cos \omega''} = \cos \omega \frac{\cos \omega'}{\cos \omega''},$$

$$(14.) \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\cos \omega \, \cos \omega'}{\cos \omega''}.$$

Dies ist die Bedingung, die erfüllt sein muß, damit die gewünschte *Monge*sche Orientierung möglich sei. Sie geht für $\varepsilon_{12} = 1$ in die Beziehung (9.) des § 18 über.

Sind als Bestimmungselemente die drei Kernwinkel $\omega, \omega', \omega''$ gegeben, so läßt sich das Netz für die *Monge*sche Orientierung (Fig. 21) auf Grund der vorangehenden Ausführungen, wie folgt, konstruieren: Man zeichnet zunächst aus den drei Kernwinkeln ein beliebiges Kernstrahlenviereck $xx'x''G_{12}$ und zieht senkrecht zu xx' den Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ beliebig. Wird er von $G_{12}x'$ in J geschnitten, so zieht man durch J die Senkrechte zu $\mathfrak{g}_{01}$, welche von $G_{12}x''$ in L geschnitten wird, — und durch L die Senkrechte zu xx'', welche den Grundschnitt $\mathfrak{g}_{02}$ vorstellt und $\mathfrak{g}_{01}$ im Scheitelpunkt O schneidet. Dann ist durch das Abstandsverhältnis des Punktes O von $G_{12}x'$ und $G_{12}x''$ das Kernbüschelverhältnis ε_{12} bestimmt. Endlich zieht man noch durch J die Senkrechte zu $\mathfrak{g}_{02}$, welche LG_{12} in i'' schneidet, und legt durch O die zwei Linien $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ so, daß sie von den zwei Strahlenbüscheln J und i'' nach kongruenten Punktreihen $OH'K'$ und $OH''K''$ geschnitten werden.

Die Deutung der Fig. 21 im Sinne der *Monge*schen Grund- und Aufriß-Methode bedarf keiner Erläuterung.

Wir fragen ferner nach der Bedingung, die erfüllt sein muß, damit bei der besprochenen räumlichen Orientierung außer dem Flächenwinkel an der Kante $\mathfrak{g}_{01}$ auch noch derjenige an der Kante $\mathfrak{g}_{02}$ ein Rechter werde.

Es müssen dann auch die gegenüberliegenden Seiten des Orientierungsdreikants Rechte sein, das heißt: die Linien $\mathfrak{h}'_{12}$ und $\mathfrak{h}''_{12}$ müssen bezw. senkrecht zu $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{02}$ werden; die Punkte K' und K'' fallen also ins Unendliche und die Fig. 21 geht in die Fig. 22 über. Als Bedingung für die

Punktetripel $xx'x''$ der Punkt x mit dem Punkt y des vorigen Tripels zusammen, so ist $y''x''=y'x'$. Ein durch Grundriß und Aufriß gegebenes Objekt bildet sich demgemäß in der Militärperspektive so ab, daß Grundriß und Höhen in wahrer Gestalt und Größe erscheinen.

Die verwandtschaftliche Beziehung der Militärperspektive zu Grundriß und Aufriß ist durch die fünf Gleichungen (13.) und $(16, \alpha, \beta, \gamma)$ gekennzeichnet und ist durch ein einziges Bestimmungselement bestimmt.

Kehren wir zu dem allgemeinen, durch Gleichung (13.) definierten Fall zurück, so können die drei Systeme auch in eine solche räumliche Orientierung gebracht werden, bei welcher die Ebenen zweier Systeme, deren gegnerische Kernstrahlenbüschel kongruent sind, sich *in paralleler Stellung* befinden oder *zusammenfallen.* Wir beschränken uns im nachfolgenden auf die Erörterung der letzteren Anordnung.

Um z. B. eine Orientierung mit zusammenfallenden Systemebenen S und S'' zu bewirken, gehen wir wieder von dem Kernstrahlenviereck $xx'x''G_{12}$ mit Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ (vergl. Fig. 21) aus, das aus den gegebenen Bestimmungselementen $\omega, \omega', \omega'', \varepsilon_{12}$ gezeichnet wird, wie zu Anfang dieses Paragraphen angegeben wurde. Es ist aus Fig. 21 nach Fig. 23 in unveränderter Form übertragen. Von den zwei anderen, zunächst unbestimmten, Grundschnitten ist, wenn S'' mit S zusammenfallen soll, $\mathfrak{g}_{02}$ im Unendlichen, $\mathfrak{g}_{01}$ zusammenfallend mit $\mathfrak{g}_{12}$ anzunehmen. $\mathfrak{g}_{01}$ möge von xx' in G_{01} geschnitten werden. — Dreht man nun die Systemebene S' um den gemeinsamen Grundschnitt $[\mathfrak{g}_{01}, \mathfrak{g}_{12}]$, so daß sie mit der festgehaltenen gemeinsamen Systemebene $[S, S'']$ einen beliebigen Flächenwinkel macht, so ist die gewünschte Orientierung hergestellt. Das vorher ebene Viereck $xx'x''G_{12}$ ist jetzt in der Linie $G_{01}G_{12}$ gebrochen. — Um sodann die objizierenden Strahlen zu ermitteln, bemerke man, daß der objizierende Strahl von x' die Schnittlinie der zwei Kernebenen $x'G_{01}x$ und $x'G_{12}x''$ bildet. Schneiden sich also $G_{01}x$ und $G_{12}x''$ in M, so stellt die (räumliche) Verbindungslinie $x'M$ den objizierenden Strahl von x' vor. Die dritte, durch xx'' gehende Kernebene und die in ihr liegenden objizierenden Strahlen von x und x'' sind zunächst unbestimmt. Um sie zu bestimmen, kann man einen beliebigen Punkt der Raumgeraden $x'M$ als Objektpunkt X festsetzen. Alle drei Systeme stellen sich dann im allgemeinen als schiefe Parallelprojektionen dar.

Wir fragen wieder nach den Bedingungen für die Möglichkeit einer *Mongeschen Orientierung* in bezug auf die Systeme S und S'. Der Flächen-

winkel am Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ kann ohne weiteres gleich einem Rechten gemacht werden. Damit dann der objizierende Strahl von x' senkrecht zur Ebene S' sei, ist erforderlich, 1) daß $\mathfrak{g}_{01}$ senkrecht zu $G_{01}x'$ sei, 2) daß M ins Unendliche falle, also $G_{01}x$ parallel zu $G_{12}x''$ sei. Trifft dies zu, so geht Fig. 23 in Fig. 24 über, und es kann dann auch der objizierende Strahl von x senkrecht zur Ebene S angenommen werden.

Die gefundenen Bedingungen drücken sich in den zwei Beziehungen zwischen den Bestimmungselementen aus:

$$(17\alpha) \qquad \varepsilon_{12} = \cos \omega',$$

$$(17\beta) \qquad \omega'' = \omega.$$

Im Sinne der *Monge*schen Grund- und Aufriß-Methode gedeutet, stellt S'' die schiefe Parallelprojektion eines durch Grundriß S und Aufriß S' gegebenen Objektes auf die Grundrißebene vor. Man bezeichnet diese Projektionsart als *Schattenperspektive* oder *Militärperspektive im weiteren Sinn.* Ihre Verwandtschaft zu Grundriß und Aufriß ist durch die vier Gleichungen (13.), (17α) und (17β) gekennzeichnet.

Die Gleichungen (17α) und (17β) sind identisch mit den Gleichungen (16γ) und (16α). Tritt zu ihnen noch die mit (16β) identische Gleichung

$$(17\gamma) \qquad \operatorname{tg} \omega' = \sin \omega,$$

so gelangt man wieder zur *Militärperspektive im engeren Sinn.* Ihre doppelte Definierbarkeit als Projektion entweder auf eine vertikale — oder auf eine horizontale Projektionsebene ist bekannt. Als geometrische Deutung der Gleichung (17γ) mit bezug auf Fig. 24 ergibt sich:

$$xx'' = G_{01}x'.$$

Faßt man das System S' als Grundriß, S als Aufriß auf, so stellt S'' die *Kavalierperspektive* (im weiteren bezw. engeren Sinn) dar. Diese ist, wie bekannt, ihrem Wesen nach nicht verschieden von der Militärperspektive, sondern ist nur durch eine andere Lage des Projektionssystems zur vertikalen Richtung des Raumes bedingt. Soll nach wie vor S den Grundriß, S' den Aufriß bezeichnen, so ist die Verwandtschaftsbeziehung der Kavalierperspektive zu Grundriß und Aufriß durch die Gleichungen (13.) und (17α, β, γ) charakterisiert, wenn in ihnen die Indizes bezw. Akzente 0 und 1 vertauscht werden.

§ 21.

Kartesische, axonometrische, rhomboedrische Verwandtschaft.

Wir haben in § 18 von der orthogonalen Verwandtschaft aus mittels sukzessiver Spezialisierung die *Monge*sche „Drei-Tafel-Verwandtschaft" abgeleitet. Man kann zu ihr auch von anderem Gesichtspunkt aus gelangen.

Wir betrachten drei Systeme in räumlicher Orientierung von der besonderen Art, daß — wie es beim allgemeinen kartesischen Koordinatensystem der Fall ist — die drei Kernebenen eines Punktetripels zusammen mit den drei Systemebenen ein Parallelepiped bilden, als dessen Kanten die drei Grundschnitte, die sechs Kernstrahlen und die drei objizierenden Strahlen erscheinen.

Da jedes Kernbüschelverhältnis gleich dem Verhältnis der Sinusse der zwei Winkel ist, unter denen die zwei gegnerischen Kernbüschel den zugehörigen Grundschnitt schneiden, und da unter den angenommenen Umständen diese Winkel gleich den Kernwinkeln der betreffenden Systeme sind, bestehen zwischen den Kernwinkeln und Kernbüschelverhältnissen die Beziehungen

$$(18\alpha) \qquad \varepsilon_{01} = \frac{\sin \omega}{\sin \omega'}, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\sin \omega'}{\sin \omega''}, \qquad \varepsilon_{20} = \frac{\sin \omega''}{\sin \omega},$$

woraus folgt

$$(18\beta) \qquad \varepsilon_{01}\, \varepsilon_{12}\, \varepsilon_{20} = 1.$$

Umgekehrt leuchtet ein, daß drei Systeme sich stets in eine räumliche Orientierung der genannten Art bringen lassen, sobald die Bedingungen (18α) zutreffen. Denn die zu zwei Punktetripeln gehörigen Kernstrahlen bilden in jedem System ein Parallelogramm, das unter jener Voraussetzung mit jedem der zwei andern Parallelogramme eine Seite gleich hat. Setzt man nun die drei Parallelogramme zu einem Dreikant zusammen, indem man drei solche Ecken, die ein Punktetripel bilden, im Scheitelpunkt vereinigt und je zwei von ihnen ausgehende gleichlange Seiten zu einer Kante zusammenfügt, so ist die orientierte Lage hergestellt.

Wir bezeichnen diese besondere Art der räumlichen Orientierung als *kartesische Orientierung* und nennen eine Verwandtschaft, die eine solche zuläßt, eine *kartesische Verwandtschaft.* Sie ist durch die Beziehungen (18α) gekennzeichnet und ist durch drei Bestimmungselemente, z. B. die drei Kern-

winkel bestimmt, und zwar in zwei supplementären Typen. Beim Typus A sind (gemäß den Feststellungen des § 3) die Seiten des Orientierungsdreikants entweder alle drei stumpf, oder einer stumpf, die zwei andern spitz; beim Typus B sind entweder alle drei oder nur einer spitz. (Es verhält sich also *umgekehrt* wie bei der orthogonalen Orientierung einer orthogonalen Verwandtschaft, vergl. Fig. 13A und 13B). Die drei Dreikante mit ungleichartigen Seiten bilden die Nebendreikante desjenigen mit gleichartigen Seiten; das letztere mag wieder als Hauptdreikant bezeichnet werden. — Der stumpfwinklige Typus besitzt keine einzelkernige Ausartung.

Als Eigentümlichkeit dreier kartesischen Systeme in kartesischer Orientierung ist hervorzuheben, daß, wenn von einem Punktetripel ein Punkt mit dem Objektpunkt zusammenfällt, die zwei andern Punkte in die dem ersten System angehörigen Grundschnitte fallen. Diese von der *Monge*schen Drei-Tafel-Verwandtschaft bekannte Besonderheit ist nicht durch das orthogonale, sondern durch das kartesische Prinzip bedingt.

Eine Unterart der kartesischen Verwandtschaft erhält man, wenn bei der Herstellung der räumlichen Orientierung die drei Systeme in die nämliche Ebene fallen. Dies tritt ein, wenn zu den Beziehungen (18α) noch die Bedingung hinzukommt

$$\sin(\omega^{(i)} + \omega^{(k)}) = \sin \omega^{(l)}, \tag{19.}$$

mit der Maßgabe, daß für die zwei Verwandtschaftstypen A und B getrennt gilt

$$\omega + \omega' + \omega'' = 2R, \tag{19A}$$

$$\omega^{(i)} + \omega^{(k)} = \omega^{(l)}. \tag{19B}$$

Man bemerke, daß diese Bedingungen für die zwei Typen A und B *umgekehrt* lauten wie die für die komplanare Unterart der orthogonalen Verwandtschaftsgattung maßgebenden Bedingungen (12A) und (12B) (S. 152).

Drei solche Systeme in der genannten ebenen Orientierung können aufgefaßt werden als parallelperspektivische Abbildung dreier allgemeinkartesischen Systeme in kartesischer Orientierung, wie eine solche Abbildung bei der axonometrischen Projektionsmethode ausgeführt wird. Wir bezeichnen daher eine Verwandtschaft, die der durch die Beziehungen (18α) und (19.) gekennzeichneten Unterart angehört, als *axonometrische Verwandtschaft*. Sie ist durch 2 Bestimmungselemente bestimmt.

Ist einer der drei Kernwinkel ein *Rechter*, so werden die zwei supplementären Verwandtschaftstypen A und B identisch (vergl. § 3). Man hat dann den Sonderfall der *militärperspektiv-* oder *kavalierperspektiv-axonometrischen Verwandtschaft.* Sie erfordert *ein* Bestimmungselement.

Eine andere Unterart der kartesischen Verwandtschaft wird dadurch bedingt, daß zu den Beziehungen (18α) noch die Beziehung tritt

$$(20\alpha) \qquad \omega = \omega' = \omega'',$$

wodurch (18α) übergeht in

$$(20\beta) \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{20} = 1.$$

Das bei der kartesischen Orientierung von den drei Systemebenen und den drei Kernebenen eines Punkttripels gebildete Parallelepiped wird dann zum Rhomboeder (im kristallographischen Sinn). Wir bezeichnen daher eine Verwandtschaft, die der durch die Gleichungen (20α) und (20β) definierten Unterart angehört, als *rhomboedrische Verwandtschaft.* Sie ist durch *einen* Kernwinkel bestimmt.

Da die Beziehung (20β) mit der die orthogonale Verwandtschaft kennzeichnenden Beziehung (7.) (vergl. § 15) identisch ist, läßt eine rhomboedrische Verwandtschaft ebensowohl eine orthogonale als eine rhomboedrische Orientierung zu. Für beide Verwandtschaftstypen sind die Seiten des Hauptorientierungsdreikants der orthogonalen Orientierung die Supplemente der Seiten des rhomboedrischen Hauptorientierungsdreikants. — Alle im § 15 besprochenen invarianten Eigenschaften der orthogonalen Verwandtschaft kommen auch der rhomboedrischen Verwandtschaft zu.

Haben die Kernwinkel den speziellen Wert

$$(21.) \qquad \omega = \omega' = \omega'' = R,$$

so werden die beiden Verwandtschaftstypen identisch und die rhomboedrische und die orthogonale Orientierung fallen zusammen. Man hat dann wieder die spezielle *Mongesche Drei-Tafel-Verwandtschaft.*

Ein anderer bemerkenswerter Einzelfall wird dadurch bedingt, daß man zu den Beziehungen (20α) und (20β) noch die Bedingung (19 A) oder (12 B) hinzufügt, wodurch die Kernwinkel den speziellen Wert erhalten:

$$(22.) \qquad \omega = \omega' = \omega'' = \frac{2}{3} R.$$

In diesem Falle treffen die Kriterien der rhomboedrischen, axonometrischen, orthogonalen und komplanaren Verwandtschaft zugleich zu. Indessen können nicht die nämlichen drei Systeme allen vier verschiedenen Orientierungsarten unterzogen werden; vielmehr ist von den zwei supplementären Verwandtschaftstypen, die durch die Beziehungen (20β) und (22.) bestimmt sind, jede nur zweien derselben zugänglich. Da die Bedingungen der komplanaren und der axonometrischen Orientierbarkeit — Gleichungen (12.) und (19.) — für die beiden Verwandtschaftstypen A und B umgekehrt lauten, ist es nicht möglich, die nämlichen drei Systeme sowohl komplanar als axonometrisch zu orientieren. Ebenso wurde bereits in § 19 hervorgehoben, daß eine komplanare und eine orthogonale Orientierung für die nämlichen drei Systeme nicht möglich ist. Das Gleiche gilt für eine rhomboedrische und eine axonometrische Orientierung. Dagegen vertragen sich sehr wohl mit einander: eine rhomboedrische und eine orthogonale, eine rhomboedrische und eine komplanare, sowie eine orthogonale und eine axonometrische Orientierung.

In der Tat ergibt sich in dem vorliegenden Fall: Beim Verwandtschaftstypus A zeigt die orthogonale Orientierung nichts Besonderes; die rhomboedrische Orientierung degeneriert zu einer axonometrischen, und zwar zu einer solchen, wie sie die *Weisbach*sche „isometrische Projektion" darstellt. Beim Typus B zeigt die rhomboedrische Orientierung nichts Auffallendes; dagegen degeneriert die orthogonale Orientierung zu einer komplanaren.

Band 128. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätsstraße 54.

GUCCIA-MEDAILLE.

Der *Circolo Matematico di Palermo* wird bei dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß, der im Jahre 1908 in Rom stattfinden soll, einen internationalen Preis für Geometrie erteilen. Dieser Preis, der nach seinem Stifter „Guccia-Medaille" heißt, wird aus einer kleinen tragbaren Goldmedaille und einer Summe von 3000 Francs bestehen.

Die Theorie der algebraischen Raumkurven ist bekanntlich seit den Arbeiten, die durch den Steinerschen Preis von 1882 hervorgerufen wurden, vernachlässigt worden. Die großen Fortschritte der Geometrie, welche durch die synthetischen, algebraischen oder funktionentheoretischen Methoden erreicht wurden, haben diese Theorie nicht berührt, sodaß weder die fundamentalen Betrachtungen, die in den zitierten Arbeiten begonnen wurden, noch andere Fragen, die man stellen könnte, Gegenstand späterer Arbeiten gewesen sind. Geht man ferner vom dreidimensionalen Raume zu höheren Räumen über, so begegnet man für die algebraischen Kurven (insbesondere was ihre Klassifikation, das Studium der kanonischen Kurven gegebenen Geschlechts usw. angeht) einer Menge von wichtigen Problemen, mit denen sich bis jetzt noch niemand beschäftigt hat. Auch kennt man über die algebraischen Raumkurven nur wenige Theoreme, die die Realitätsverhältnisse oder einen gegebenen Rationalitätsbereich betreffen.

Betrachtungen dieser Art haben den *Circolo Matematico di Palermo* bewogen, in Übereinstimmung mit den Absichten des Stifters, die „Guccia-Medaille"

einer Abhandlung zu erteilen, welche die Theorie der algebraischen Raumkurven wesentlich fördert.

Hierbei sollen jedoch in keiner Weise die Probleme und Methoden der Untersuchung im voraus beschränkt werden.

Wenn keine der zur Bewerbung eingesandten, auf die genannte Theorie bezüglichen Arbeiten des Preises würdig befunden wird, so kann er

einer Abhandlung zugesprochen werden, die einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der algebraischen Flächen oder anderer algebraischer Mannigfaltigkeit bezeichnet.

Die eingereichten Abhandlungen dürfen noch nicht veröffentlicht sein. In einer der vier Sprachen: italienisch, französisch, deutsch oder englisch abgefaßt und, abgesehen von den Formeln, mit der Schreibmaschine geschrieben, sind sie dem Präsidenten des *Circolo Matematico di Palermo* **vor dem 1. Juli 1907** in drei Exemplaren einzureichen. Sie müssen mit einem Motto versehen und von einem verschlossenen Umschlag begleitet sein, der außen das Motto und innen Namen und Wohnort des Verfassers zeigt. Die gekrönte Abhandlung wird in den „*Rendiconti*" oder einer anderen Publikation des *Circolo Matematico di Palermo* abgedruckt. Der Verfasser erhält 200 Separatabzüge kostenfrei.

Wenn überhaupt keine der eingereichten Abhandlungen des Preises würdig befunden wird, so kann dieser einer schon veröffentlichten Arbeit zugesprochen werden, die sich auf die oben genannten Theorien bezieht, falls sie zwischen dem Zeitpunkt der Publikation dieses Programms und dem 1. Juli 1907 erschienen ist.

Den Preis erteilt der *Circolo Matematico di Palermo* gemäß der Entscheidung einer internationalen Kommission von drei Mitgliedern, die aus den Herren: Max Noether, Professor an der Universität Erlangen, Henri Poincaré, Professor an der Universität Paris, Corrado Segre, Professor an der Universität Turin besteht.

In einer der Sitzungen des IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses, der 1908 in Rom tagt, wird der Bericht der Kommission verlesen, der Preis erteilt und der Name des gekrönten Gelehrten bekannt gegeben werden.

Palermo den 1. November 1904.

Der Präsident des *Circolo Matematico di Palermo*

M. L. Albeggiani.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

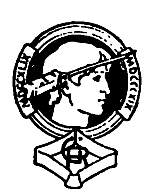
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 128.

Heft III.

Ausgegeben den 18. Februar.



Berlin,

W. 35, Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1905.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14. -.

Hierzu drei Beilagen der Verlagsbuchhandlung Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

On the general theory of functions.

By *Philip E. B. Jourdain*, Trinity College, Cambridge.

The present Essay relates to the study of functions from three points of view which are connected with one another. These points of view are, I believe, new, and, for the short disposal of certain questions, necessary.

Isolated results with respect to the cardinal numbers*) of certain aggregates of functions have long been known.**) By the help of a general determination (§ 3) of the cardinal number of the aggregate of all functions definable by fundamental sequences of continuous functions (that is to say, functions to which an existence-theorem is applicable), it is possible to draw conclusions (§ 7) as to the analytical representability of certain classes of functions. The most novel result which I have obtained is the proof that an integrable function cannot, in general, be represented by even a non-uniformly convergent series of continuous functions.

Now, the first point of view referred to above is the consideration of the cardinal number belonging to a certain class of functions with a view

*) This word is used to denote the concept introduced and developed by *Cantor* (see in particular, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", Math. Ann., Bd. XLVI (1895), p. 481—512), given that precision which is only possible with symbolic logic by *Russell*, and further developed, in an exact form, by *Whitehead* (see *Russell*, Riv. di Mat., VII (1901), p. 121—125, and "The Principles of Mathematics", Cambridge, 1903, p. 115, 304—305; and *Whitehead*, Amer. Journ. of Math., vol. XXIV (1902), p. 367—394).

**) *Cantor:* „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre", Leipzig, 1883, p. 30, 46 (or Math. Ann., Bd. XXI (1882), p. 574, 590); *Borel:* „Leçons sur la théorie des fonctions", Paris, 1898, p. 125, 126. Their results (with another) are simply derived by the general formula in § 8; results 8, 9 and 10.

to the decision, which is possible in very comprehensive cases, as to whether every function of that class is representable, in the above sense.

The cardinal numbers of the aggregates of two important classes of functions (namely, continuous and analytic functions) may be at once obtained, independently of assuming a development in a certain form to be possible, from the cardinal number (which is, in each of the above cases, the first transfinite cardinal number, Aleph-zero) of any aggregate of values among those of the independent variable such that, when the values of the (one-valued) function are given for the points of merely *this* aggregate, the values for all other points in the domain of existence are determined. I call such aggregates "aggregates of definition"; and the second point of view consists in the regarding of an aggregate of definition and the corresponding function-values as alone sufficient for the complete construction of a function of a determined class. The solution of the problem of this construction, to which we return in a moment, leads to allied results which seem of importance in Mathematics.

The study of the *cardinal* properties of aggregates of functions and of their aggregates of definition, when these exist,*) constitutes the "Cardinal Theory of Functions". To this Theory Part I of the following essay is mainly devoted; and I give (§ 8) a general formula for determining the cardinal number of the aggregate of any class of functions having aggregates of definition.

But perhaps even more important are the *ordinal* properties of the aggregates of definition. The types of the aggregates of those classes of functions which we are studying are readily found, and suggest, firstly (§ 5), a method for the actual construction of an analytic function from the mere datum of an aggregate of definition and the corresponding function-aggregate, which is fully carried out in Part III; and secondly, the question as to how far the theory of functions is purely ordinal, or, in other words, is

*) They exist for continuous, differentiable, and analytic functions; but the occurrence of any singularities (such as discontinuities) in the domain of existence of the function gives rise to the difficulties mentioned below, first note of § 3. Of course, by the fact that the domain of existence of an analytic function contains no singularities, the difficulty cannot arise for such functions. The importance of the concept of aggregate of definition is due to the fact that *all* the aggregates of definition of functions of one class have the *same* cardinal number and the *same* ordinal type.

capable of treatment merely by *Cantors* theory of ordinal types. This question is answered — I think completely — in the "Ordinal Theory of Functions" of Part II, and this wider conception of the theory of functions again furnishes a new (the third) point of view. Here, of course, since *Cantors* types only apply to *simply*-ordered aggregates, the theory is an analogue of the theory of *real* one-valued functions of *one real* variable.

A further account of the contents of the second and third parts are given in the respective introductions to these parts. I will only mention, in addition, that I lay great stress on the fact that, particularly in the first and second parts, great advantages are gained from the explicit introduction into the theory of functions of the concepts of, and methods of calculation with, the transfinite cardinal numbers and ordinal types of *Georg Cantor*. These advantages appear both in the solving of certain problems in the theory of functions and in extending the conceptions of this theory.

I now pass on to a fuller description of the cardinal and ordinal theories of functions and the properties of aggregates of definition. The best way seems to give first (§§ 1 and 3) the two remarks which served as starting-point for the whole theory.*)

Part I.

The Cardinal Theory of Functions.

1.

The concept of the "continuity" of the real one-valued function $f(x)$, of the real continuous variable x at the point $x = a$ was first precisely formulated by *Bolzano***) and *Cauchy*,***) independently of one another. It leads to the necessary and sufficient condition that, having taken any real positive number ϵ, which, though arbitrarily small, is not zero, there exists a positive

*) The content of § 5 has been published by me in the Messenger of Mathematics (Sept., 1903): "The cardinal number of the aggregate of integrable functions", and that of § 8 in the Philosophical Magazine (Sept., 1903, p. 323—326; "A general theorem on the transfinite cardinal numbers of aggregates of functions").

**) „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege." Prag, 1817, S. 11—12. (Facsimile-Druck, Mayer & Müller, Berlin, 1894).

***) Cours d'Analyse. Analyse Algébrique, 1821, chap. II., (Oeuvre (2), III, p. 43).

number δ such that, if

$$|x_1 - a| < \delta \quad \text{and} \quad |x_2 - a| < \delta,$$

then

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

This condition can evidently be transformed into the following equivalent concept:

Let

$$(1.) \qquad x_1, x_2, \dots x_\nu, \dots$$

be any ascending sequence (of type ω) of points which, together with their point of condensation, a, are points of the domain of existence ($\alpha \leqq x \leqq \beta$) of $f(x)$. Then if the sequence

$$(2.) \qquad f(x_1), f(x_2), \dots f(x_\nu), \dots$$

condenses at the point $f(a)$, and here alone, however (1.) is chosen provided that it only condenses at $x = a$, $f(x)$ is a *one-valued function continuous on the left of* $x = a$.

To get the concept of continuity on the right, we must consider a descending sequence (1.) of type $^*\omega$. When we speak of $f(x)$ as merely "continuous" (in the interval of existence $\alpha \dots \beta$), we imply that it is continuous both on the left and on the right of every point x such that $\alpha < x < \beta$, on the right of α, and on the left of β.

This last concept of continuity, which appears to have originated with *Cantor*, and which was first published by *Heine**) under a more special form than that given here, has two important advantages.

In the first place, it emphasizes the profound difference that there is between continuous and analytic functions. For, considering the case of a real variable, we see at once that if $f(x)$ is continuous we need only previously determine its value for an *enumerable* but *everywhere dense* aggregate in $(\alpha \dots \beta)$ in order that it may be determined for all the points of $(\alpha \dots \beta)$. We may express the ordinal aspect of this more briefly by saying that an "aggregate of definition" of the continuous function $f(x)$ is of ordinal type η. On the other hand, an aggregate of definition of the *analytic* function $f(x)$,

*) This Journal, Bd. 74 (1872), S. 182, see also *Schönflies*, next note but two.

defined for a real domain $\alpha < x < \beta$, is any aggregate, of ordinal type

$$\omega \quad \text{or} \quad {}^*\omega$$

whose elements and (single) point of condensation are within the aggregate $\alpha < x < \beta$. This is a consequence of the well known theorem in the theory of one-valued analytic functions of a complex variable, that any two such functions, which coincide for the points of any aggregate condensing at at least one point within the common domain of existence, are identically equal.*)

2.

In the second place, it is now possible to generalise the concept of the continuity of $f(x)$ to the case where the argument is merely *any* partly or wholly closed aggregate, that is, an aggregate containing points of condensation. This extension has been treated, with great success, by *Jordan*,**) and later by *Schönflies*;***) and it is not impossible that there may some day be founded on these bases the "modified mechanics" imagined by *Cantor*†) on the occasion of his discovery that a continuous motion may take place in certain discontinuous spaces.

From this, we conclude that "an aggregate of definition" has only a precise meaning when we have specified the nature of the aggregate for which $f(x)$ is ultimately to be defined. Now, we have seen that the datum of $f(x)$ for the simplest transfinite aggregate possible, — that of type ω — suffices, when $f(x)$ is any analytic function, to determine $f(x)$ for all the points of the continuum††) $\alpha < x < \beta$. Thus, if analytic functions (of a real variable) are, as we wish, to be included, in their full generality, among the functions considered here, we must always suppose that the domain of the argument x is a "continuum of one piece", that is to say, an aggregate composed of all the points such that $\alpha < x < \beta$ or $\alpha \leq x \leq \beta$. In the latter case the ordinal type is θ.

*) See Part III.

**) Cours d'Analyse, 2ième éd., t. I. (1893).

***) „Bericht über die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten", S. 115—125. (Jahresber. d. d. M.-V., VIII. 1900). See Part II below.

†) Math. Ann., XX, (1882), S. 121.

††) This is only a "continuum" in *Weierstrass*' sense, and is not perfect, that is to say, where P is the aggregate we do not have $P^{(1)} \equiv P$. We can evidently here consider a *Cantors* continuum $\alpha \leq x \leq \beta$ instead.

3.

Observe now that analytic functions and continuous*) functions are defined for an x-aggregate of cardinal number

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

by the datum of the values of the function for an enumerable aggregate (of type ω, $^*\omega$, or η) among those of the argument-continuum, that is to say, for an aggregate of cardinal number

$$\aleph_0.$$

We need, then, only consider an argument aggregate of this latter cardinal number, and at least all possible functions of one of the above classes are obtained by making correspond to each element of this aggregate one function-value; each function-value being chosen arbitrarily and independently from an aggregate of cardinal number $\mathfrak{c}$.**) Consequently the cardinal number

*) Functions which are discontinuous at an enumerable or even a finite aggregate of points have no aggregate of definition, in the above sense. For the, in general arbitrary, value at a point of discontinuity cannot, of course, be found from the neighbouring values. But if we first give an everywhere dense aggregate and define a continuous function for every point, and *then* introduce any enumerable aggregate of particular values (so that we alter those previously obtained), we may call this pair of specifications a (modified) aggregate of definition, and may then say that the (modified if necessary) aggregate of definition of all functions, the cardinal number of whose discontinuities (which are of the kind described) is at most $\aleph_0$, is $\aleph_0$. Unfortunately this theorem cannot be extended to the whole class of E-functions (§ 3); for *Baire* (Ann. di Mat., (3), III., p. 37 sqq.) has shown that there are E-functions, the cardinal number of whose discontinuities is $\mathfrak{c}$.

I must also remark that Mr. *G. H. Hardy* has lately pointed out to me that the result (§ 3) that the cardinal number of all E-functions is $\mathfrak{c}$, had already been given by *Baire* on pp. 70 and 71 of this memoir „Sur les fonctions de variables reelles". But *Baire* makes no use of his theorem so as to get results like those of § 6.

**) If we assign an arbitrary value to every point of an aggregate of definition of, e. g., an analytic function, while we certainly get all possible analytic functions for the domain considered, we get also others (therefore non-analytic). It is not hard to see that the aggregate of values corresponding to an aggregate of definition is not wholly arbitrary; and we shall return to the question when dealing in particular with the aggregate of definition of analytic functions. But, although we can only conclude from this that, where $\mathfrak{f}$ is the cardinal number of all analytic functions,

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{c};$$

finite ordinal numbers

$$1, 2, \dots \nu, \dots.$$

This function $f_\omega(x)$ is then proved to be the function sought.

This method can be generalised, for the functions $f_\nu(x)$ may be themselves defined by fundamental sequences.

Evidently, in the above sketch, no information is given as to *how* the functions

$$f_1(x),\ f_2(x), \dots f_\nu(x), \dots$$

are to be constructed; this seems always to depend on the particular problem in which an existence-theorem is required. But the only points essential to our present purpose are evidently that:

1. Each $f_\nu(x)$ is defined for the interval-continuum $(\alpha \dots \beta)$ by the datum of an aggregate of values corresponding to an aggregate in $(\alpha \dots \beta)$ of cardinal number $\aleph_0$ at most,*)

2. The sequence of functions $f_\nu(x)$ is of cardinal number $\aleph_0$.

Accordingly, we are to consider in general a function $f_\omega(x)$ defined in $(\alpha \dots \beta)$ as the limit of a sequence of functions

$$f_1(x),\ f_2(x), \dots f_\nu(x), \dots$$

which are all continuous in $(\alpha \dots \beta)$. Then $f_\omega(x)$ is determined for every point in $(\alpha \dots \beta)$ by the data of the values of each $f_\nu(x)$ for an everywhere dense but enumerable aggregate in $(\alpha \dots \beta)$; and the latter data are necessary and sufficient for the determinateness of the functions $f_\nu(x)$ in $(\alpha \dots \beta)$. Thus $f_\omega(x)$ is determined by $\aleph_0$ data, each datum of which is the datum of $\aleph_0$ values. That is to say, $f_\omega(x)$ is fully determined by the datum of an aggregate of values of cardinal number

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

If now we choose each of these $\aleph_0$ values arbitrarily from the real-number continuum, we get the result that the aggregate of functions definable by a fundamental sequence of continuous functions is of cardinal number

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{c}^{\aleph_0}.$$

---

*) If $f_\nu(x)$ is simply rational, this cardinal is finite; if analytic, it is finite or $\aleph_0$; if continuous, it is $\aleph_0$.

Since, further, the class considered includes the class of continuous functions; — which result when the fundamental sequence converges uniformly to its limit —; we have

$$\mathfrak{f} \geq 2^{\aleph_0}.$$

Hence, as before

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c};$$

or, in words, *the cardinal number of the aggregate of all functions to which an existence-theorem is applicable is*

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

4.

*Cantor**) has stated that the cardinal number of all *integrable* functions is also $\mathfrak{c}$. I shall, however, show in § 6 that the cardinal number of these functions is *greater than* $\mathfrak{c}$. In section 5, I briefly consider a property of the functions whose aggregates of definition are each of cardinal number $\aleph_0$.

5.

Any two such functions, of which aggregates of definition coincide, are identical if their values for this common aggregate (of cardinal number $\aleph_0$) are. Also the works of *Weierstrass*,**) *Runge*,***) *Lebesgue*†) and *Mittag-Leffler*,††) have shown that it is always possible to represent any continuous function of a real variable, by an absolutely and uniformly convergent series of rational and integral functions — a possibility due to the aggregate of definition being of cardinal number $\aleph_0$. Consequently, for every such function, the problem of interpolation, extended to the case of any enumerable aggregate, is always uniquely determinate.

---

*) Math. Ann., XXI, (1883), p. 590. I correct a small inexactitude in *Cantors* expression; in fact, he assumes (what is yet unproved) that $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

**) Berl. Ber., 1885; Journ. de Math., (4), II (1886) p. 105—138; Ges. Werke, III, p. 1—37.

***) Acta Math., VII (1886) p. 387.

†) Bull. des sc. math., (2) XXII (1898), p. 278.

††) Palermo Rend., XIV (1900), p. 217—224.

For analytic functions, any aggregate of definition is of the very simple type ω or $^*\omega$; this case is, then, particularly favourable for the extension of the well known formula of *Lagrange*:

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\varphi(x)}{(x-a_\nu)\varphi'(a_\nu)},$$

where

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$

or the equivalent formula of *Newton* and of *Gauß*

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\nu),$$

to the case of n infinite.*) The further development of this will be given in Part III.

6.

Consider, now, the cardinal number of integrable functions. We know that, in order that the function $f(x)$, defined in the interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$, should be integrable,**) it is necessary and sufficient that: (I) $f(x)$ should have a finite upper and lower limit; (II) the aggregate of the points where the fluctuation of $f(x)$ is greater than the arbitrarily small positive number σ should be of content zero. At these points $f(x)$ may be completely indeterminate between finite limits; that is to say, the integral-function is unaltered if the function-values at each of these points independently take all the values in turn of an aggregate of cardinal number $\mathfrak{c}$. But an aggregate of content zero can be of cardinal number $\mathfrak{c}$; for a perfect aggregate may be "unextended". Consequently:

To every integral-function belongs an aggregate of integrable functions of cardinal number

(3.) $$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

*) *Pincherle* ("Sull' Interpolazione"; Mem. della Accad. di Bologna (5), III, 1893) has treated the problem of interpolation when the aggregates of definition are everywhere dense. However, he adopted a trigonometrical form of representation of the function sought, and it is known that not every continuous function can be thus represented. Further it is not easy to see what object is gained by making the unnecessary supposition (in the case of analytic functions) that the aggregate is everywhere dense, when a much simpler aggregate suffices.

**) We consider only proper integrals.

Since, now, the cardinal number of *all* functions is also $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$,*) the cardinal number of all integrable functions is

$$\mathfrak{f} \overline{\overline{<}} \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

But, by theorem (3.), this cardinal number is also

$$\mathfrak{f} \overline{\overline{>}} \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}};$$

hence the cardinal number of all integrable functions is

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

This result has not, to my knowledge, been given.**) It is evident that the cardinal number of all functions which possess an upper and lower integral in *Darboux*s sense is also

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

Further, we know that***)

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}.$$

7.

The last inequality gives important information as to the properties of all classes of functions, the cardinal number of whose aggregate is $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$, as regards representability by a fundamental sequence of continuous functions.

Since the aggregate of all representable functions is of cardinal number $\mathfrak{c}$, it follows that not all of those functions the cardinal number of whose aggregate is $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ can be thus represented. Thus, firstly; a real one-valued function of a real variable cannot in general be represented in a certain x-interval "by means of a series, finite or infinite, of operations of calculation with x". Thus the question which *Dini*†) indicated as one which "cannot be answered in a perfectly satisfactory manner in the present state of science" is answered in the negative.

*) See below, § 7.

**) Cf. the first note on p. 177. Perhaps *Cantor* accepted *Hankel's* statement that integrability depended only upon whether a function was 'punktiert' or 'total' discontinuous (in *Hankels* sense); an error corrected by *Smith* and *Harnack*.

***) *Cantor*, Jahresber. d. d. M.-V., I (1892), p. 75—78.

†) "Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali", Pisa 1878, p. 37, or the German translation: „Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränder-

Secondly, from the result of § 5, we can now definitely say that even when a function is restricted to be integrable, it is not in general representable in the manner defined.

8.

In this section is given a general formula for determining the cardinal number, or at least an upper limit of the cardinal number, of aggregates of any functions having aggregates of definition, — the most general function having, of course, aggregates of definition of the same cardinal number as the domain of the variables.

The letters $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, and $\mathfrak{e}$ denote any (finite or transfinite) cardinal numbers. Consider a function of $\mathfrak{e}$ variables, and let *each* of the variables be considered to have as domain of variability an aggregate of cardinal number $\mathfrak{d}$.*)

We have, then, to consider an aggregate of "argument-points" of cardinal number

$$\mathfrak{d}^{\mathfrak{e}}; \tag{4.}$$

as follows at once from *Cantor*s definition of exponentiation.**)

Suppose that to each argument-point correspond $\mathfrak{b}$ values of the function, and each of the values is selected from an aggregate of cardinal number $\mathfrak{a}$. Then certainly all***) the functions are obtained by making *each* of the $\mathfrak{b}$ values corresponding to each argument-point run *independently* through $\mathfrak{a}$ values. This is the same thing as making *one* value, or point,

lichen Größe", Leipzig, 1892, p. 49. It was *Hankel*s belief that every function could be analytically represented, and thus that *Euler*s concept of a function coincides with that of *Dirichlet* (see his „Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen; ein Beitrag zur Feststellung des Begriffes der Funktion überhaupt", Tübingen, 1870; reprinted in the Math. Ann., XX (1882), p. 63—112; especially p. 99 and note).

*) Thus if the function (like those of § 7) has an aggregate of definition of cardinal number $\aleph_0$, we need only consider (if there is only one variable) the argument-points of this aggregate, and so we have $\mathfrak{d} = \aleph_0$.

**) Math. Ann., Bd. XLVI, (1895), p. 486—487.

***) *More* than all if the functions are such as those of § 1. See second note on p. 174.

of an aggregate of cardinal number

$$(5.)\qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$$

correspond to each point of the aggregate (4.).

Consequently, certainly all the functions (whose cardinal number is denoted by $\mathfrak{f}$) are given by the "Belegung" of the aggregate (4.) with the aggregate (5.); that is to say,

$$(6.)\qquad \mathfrak{f} \leqq (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}^{\mathfrak{e}}}.$$

But if the values of the function corresponding to the argument-points are all independent of one another — as is the case with the most general functions —, we get, in the above process, no values or combinations of values which are to be rejected; and so, instead of (6.), we have

$$(7.)\qquad \mathfrak{f} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}^{\mathfrak{e}}}.$$

In the case of one-valued continuous or analytic functions of a finite number (ν) of variables, we have, from (6.),

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{c}^{\aleph_0^{\nu}} = \mathfrak{c}.$$

Since there is evidently a part of either aggregate of functions (for example, all rational and whole functions) of cardinal number $\mathfrak{c}$, we have also

$$\mathfrak{f} \geqq \mathfrak{c};$$

consequently

$$(8.)\qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0},$$

as shown for a special case in § 3.

By application of (7.), we at once determine the cardinal number of all real one-valued functions of one real variable to be

$$(9.)\qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}};$$

and this is also the cardinal number of all $\aleph_0$ — or $\mathfrak{c}$-valued — functions of $\aleph_0$ variables.

But we get a higher cardinal number when we consider $\mathfrak{c}$ variables. Then

$$(10.)\qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}};$$

and we know that

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}} = (\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}} > \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

9.

We have thus seen that there are two classes of theorems in the theory of functions; those exemplified in §§ 3, 6, 7, and 8 constitute the *Cardinal Theory of Functions*, while the considerations of § 1, in particular, lead to an *ordinal* theory. The cardinal theory has been, perhaps, sufficiently treated here; and, in the next Part, I shall deal with the ordinal theory.

It is to be observed that the general aggregates of § 8 are not necessarily restricted to be arithmetical aggregates; that is to say, aggregates of real (or complex) numbers. The possibility of a theory of functions which is logically prior to the generalised concept of number is shown in detail in Part II. The eighth section contains the cardinal theory of those ("ante-arithmetical") functions which can be dealt with merely by the cardinal numbers and ordinal types of aggregates and which have aggregates of definition. Of course this cardinal theory includes as a particular case the usual theory, where the $\mathfrak{a}$- and $\mathfrak{b}$-aggregates are aggregates of real or complex numbers.

Part II.

The Ordinal Theory of Functions.

The ordinal types of the aggregates of definition of continuous and analytic functions have been determined in § 1 of Part I. Of course, it was necessary to limit our consideration to the case of one real variable, since the ordinal types of *Cantor* are only applicable to *simply* ordered aggregates; but it is easy to see the general nature of these aggregates (they are, respectively, any aggregate of the continuous domain of existence which is everywhere dense and enumerable, and any aggregate of regular points whose derivative is one regular point) when the variable is complex. The construction of any analytic function (of a complex variable) from its values (u_ν) at an aggregate of definition (a_ν), hinted at in § 5 of Part I, is fully developed in Part III.*)

*) The failure of an analogous method (approximation by interpolatory polynomials) for *continuous* functions in general was pointed out by *Heine* in his paper in

is any sequence of points of the aggregate of definition condensing at $x=a$ and here alone, we have a property characteristic of continuous functions.

But the second circumstance cannot be disposed of so easily. It is, namely, due to the fact that, in the theory of functions, we have not to deal with purely ordinal conceptions, and, consequently, the properties of an aggregate like an aggregate of definition cannot be deduced merely from its ordinal type. On the other hand, *Russell**) has shown that the concepts of limit and continuity of a simply-ordered aggregate are purely ordinal, and it results from the discussions in § 1 of Part I that also the concept of the continuity of a function can be stated in a purely ordinal manner.

Accordingly, while *Russells* investigations have been mainly confined to what one may call *argument*-aggregates, I have attempted, in §§ 2 and 3 of this Part II, to state the concepts of function, limit and (what I have called) Limes, and the continuity of a function in a purely ordinal manner. The two first of the conclusions (§ 4) from the concept of continuity are somewhat similar, in statement, to those of *Schönflies*,**) but enough has been said perhaps, to show that these conclusions are not merely, as with *Schönflies*,***) conclusions about any aggregates of *real numbers*, but are statements in the purely ordinal theory of functions.

That the purely ordinal theory of functions is essentially limited to questions the general nature of which has been just sketched results from the remark (§ 5) that the other classes of functions (differentiable, integrable, ...) considered in the theory of functions are defined by extra-ordinal considerations, i. e., considerations which essentially apply to aggregates of real (or complex) numbers.

Also the purely ordinal discussion of the various possibilities in the behaviour of a function at a Limes of the argument leads to a more general

---

*) "The Principles of Mathematics", vol. I, Cambridge, 1903, p. 296—303; cf. p. 326—330. It appears to me that the chief advance made in *Cantors* later (1895, 1897) works on the theory of aggregates consists in the laying of the foundations of a purely ordinal theory of fundamental concepts, upon which *Russell* has built; or perhaps it would be more correct to attribute this point of view almost wholly to *Russell*, since *Cantor* did not emphasize this aspect of his work, and it is only briefly noticed by *Schönflies*, (*op. cit.*, p. 28).

**) *Op. cit.*, p. 117

***) *Op. cit.*, pp. 1, 115—121, 79—81, 127—144, 234—242, and cf. above, Part I, § 2.

second place, the object is the practically important one of studying the various possible limitations of this general concept.

Both the x-aggregate and the y-aggregate are, in general, infinite, and consist wholly of finite real numbers. This latter by no means implies that all the numbers of (e. g.), the y-aggregate are below or above definite finite numbers; but if this is not the case, we are accustomed to say that "the upper limit is infinity". It appears to be more precise — in statement, at least — to define a real number 'infinity' in the manner of *Russell**) as the class of all rational numbers, and to denote it by ω, for the purpose of indicating that we here have a proper (eigentlich) infinite, and also for the sake of analogy (not identity**) with *Cantor*'s first transfinite number. In the above case, we can say: ω is the first real number which is not surpassed by some member of the y-aggregate, or $\{y\}$.

This implies that $\{y\}$ is a transfinite aggregate. The case of $\{y\}$ having an attained upper limit does not presuppose finiteness or transfiniteness of $\{y\}$.

The cases in which ω is not the upper limit are all characterised by the fact that there is a finite real number unsurpassed by any member of $\{y\}$. Then we can always define a finite real number Y, which may or may not belong to $\{y\}$, such that:

1) No member of $\{y\}$ surpasses Y:

2) Y is either actually attained, or in every neighbourhood of Y there are infinitely many members of $\{y\}$, or both.

The proof that there exists such a Y is an immediate consequence of the concept of real number; and this Y is called the "upper limit" of $\{y\}$. If the upper limit is attained, as it is in all finite aggregates $\{y\}$ and in some transfinite ones, it is also called the "maximum".

In many cases of importance, the upper limit (which may or may not be a maximum) is also such a point that in every neighbourhood of it

on the upper and lower limits of a function, and, in any case, is a practical necessity irrelevant to our contemplation of functions *sub specie aeternitatis*. The same remarks apply also to *Borels* reflexions (Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, 1898, p. 1—4, 109, 125—126); cf. *Schönflies*, *op. cit.*, p. 112—113, and *Russell*, *op. cit.*, p. 268.

*) *Op. cit.*, p. 273.

**) See *Russell*, *op. cit.*, p. 150, 270, 274—275, 281, 283, 285.

We can now form the concepts of a function and its limits for simply-ordered aggregates in general.

2.

Consider two simply-ordered aggregates, P and Q, fulfilling the condition that there is a many-one relation,*) R, such that to every term of P belongs one and only one term of Q, and to every term of Q belongs at least one of P. In other words, the domain (ϱ) of R includes P, and Q is that part of the converse domain of R which is composed of the relata of the terms of P (symbolised by $\breve{\varrho}\,P$).

On this concept we may make the following remarks:

1) The domain ϱ of R may be wider than P; and, in certain cases, we can extend the domain of definition of the function beyond the P originally given (e. g., a continuous function may be defined for the Limes-points of P, when the values for these points are not given; an analytic function may be "continued" by introducing complex values of the variable). Accordingly, we can only say that P is *contained* in ϱ. That $Q=\breve{\varrho}P$ must be the case if every entity of Q is to have a referent in P, and every P a relatum in Q.

2) The concept also includes the case (mathematically, of no importance) that P (and hence Q) is the null-class. The only cases of mathematical interest are those in which *both* P and Q are *transfinite* aggregates, which are ordered, and Q has an *independent* order (i. e., an order not merely depending on its correlation with P.**)

In this general concept there is no necessary relation between the ordinal type of any aggregate in P and that of its corresponding aggregate in Q. Indeed, we cannot even conclude, from the transfiniteness of an aggregate contained in P, the transfiniteness of its corresponding aggregate in Q. We know, however, certain very general theorems on the upper and lower limits of quite general functions of a real continuous variable, which have in particular been emphasized by *Weierstrass.* Our first problem will, then, be to construct, where possible, the analogues of the concepts which

*) The conceptions and names of the logic of relations used here are those of *Russell* (see *op. cit.*, p. 23—26, 95—100, 113, 203).

**) See *Russell*, *op. cit.*, p. 262, 264—266.

appear in the theory of functions of a real variable in the purely ordinal theory of functions.

If we attempt to transfer these obviously purely ordinal notions of limit and Limes to simply ordered aggregates *in general*, we are at once met by the question as to the existence of Limites. In fact, Limites do not, in general, exist unless the aggregate considered is itself closed, or we consider — as we do with aggregates of real numbers — the aggregate as obtained by a selection from some given closed aggregate. Supposing then that the latter is the case, the Limites always exist (and only then), and the definitions of § 1 of limit and Limes can immediately be extended to this case. In particular, if the aggregate considered is itself closed, instead of being merely a part of a closed aggregate, the limits and Limites are always attained.

3.

The restriction of "continuity" of a function, though it has always, to my knowledge, been formulated for real (or complex) variables, is, as follows from § 1 of Part I, a purely ordinal conception, and is, consequently, applicable to any simply-ordered aggregate P which contains some Limites. In fact, we may introduce the following concepts:

Let P and Q be two simply-ordered aggregates as in § 2, Q being ordered independently of the correlating relation R. Suppose, further, that p_ω is an element of P such that it is Limes of certain aggregates in P; consider any*) such aggregate of elements of P of type ω:

$$(1.)\qquad \{p_\nu\} = p_1, p_2, \dots p_\nu, \dots;$$

and suppose, finally, that to this aggregate (1.) corresponds the aggregate $\{q_\nu\}$ in Q. Then either $\{q_\nu\}$ is transfinite for every such $\{p_\nu\}$, or it is finite for some (or all) such aggregates (1.); in the first case, if every such $\{q_\nu\}$ has a Limes q_ω which is the correspondent of p_ω (so that $\{q_\nu\}$ cannot have more than one Limes), we say that Q is a (one-valued) function-aggregate of P, 'continuous on the left of p_ω'. If the aggregates (1.) are of type

$$^*\omega,$$

we get, similarly, the concept of 'continuity on the right of p_ω'.

*) This word is essential, but is omitted in the analogous definition of *Schönflies* op. cit., p. 116).

In the second case, Q must be said, in conformity with what precedes, to be continuous on the left of p_ω when, and only when, the correspondents of (1.), arranged in the same order as (1.), form a sequence which consists of the same element after some definite ν. For then, and only then, does $\{q_\nu\}$ consist of a finite number (at most $\nu+1$) of terms, and this same element bears the same relation tho the finite sequence $\{q_\nu\}$ as q_ω did before when $\{q_\nu\}$ was infinite.*)

If Q is continuous on both sides of p_ω, it is said to be 'continuous at p_ω'; if it is continuous at every Limes in P (though we cannot literally speak of, e. g., continuity on the left of a Limes of P if there is no series in P of type ω belonging to this Limes), Q is said to be a 'continuous function-aggregate of P'.

4.

If the aggregate Q is transfinite, we may select out of it an infinite aggregate $\{q\}$; then to $\{q\}$ corresponds some aggregate $\{p\}$ which is of necessity infinite.

If, now, P contains the Limites of $\{p\}$, Q must contain the Limites of $\{q\}$, if Q is a continuous function-aggregate of P. Hence:

(A) If Q is continuous and P is closed, then Q is finite or closed.

If P is dense in itself, we cannot also conclude that Q is dense in itself. If, namely, q were an isolated term of Q, there would be at least one p corresponding to q; and p would be a Limes. But from this we cannot conclude that q is a Limes in the independent order of Q; for one and the same q might correspond to the final terms of all P-series of type

$$\omega \text{ or } {}^*\omega$$

of which p is the Limes.**) If, however, every q of Q is a Limes (that is to say, if Q is dense in itself), we can conclude that Q is transfinite; and consequently, by application of theorem (A):

*) Cf. *Cantor*, Math. Ann., V (1872), p. 123—132, or *Heine*'s memoir in this Journal, LXXIV (1872). The *real* rational number a is there defined as the 'sign' for the fundamental series $[a, a, a, \ldots]$ of rational numbers a.

**) This possibility (as well as the first alternative in (A)) is overlooked in some theorems analogous to (A) and (B) in *Schönflies* (*op. cit.*, p. 117) for the case of real variables (cf. § 2 of Part II).

(B) If Q is a continuous function-aggregate of P and Q is dense in itself, then, if P is perfect, Q is perfect.

If, now, we determine that P is of type η and that Q consists of more than one term, and are to endeavour to prove that Q is of type η, we first notice that the cardinal number of Q is equal to or less than that of $P(\aleph_0)$. Consequently, it only remains to show that: If to two different terms of $P(p, p_1)$ correspond two different terms of $Q(q, q_1)$; say

$$p > p_1, \quad q > q_1;$$

then there is a term r such that

$$p > r > p_1,$$

to which corresponds some term s of Q such that

$$q > s > q_1.$$

We start from p_1 and consider a term p_1' in the interval*) $(p_1 \dots p)$. If

$$q_1' > q,$$

we may consider $(p_1 \dots p_1')$ instead of $(p_1 \dots p)$ and proceed again in a similar manner; but if not, we either determine a r as required or we arrive at considering an interval $(p_1' \dots p)$. Proceeding in this way, we obtain a sequence of intervals, such as

$$(p_1 \dots p), (p_1 \dots p_1'), \dots (p_1^{(\omega)} \dots p_1'), \dots (p_1^{(\omega)} \dots p_1^{(\omega+\nu)}), \dots,$$

where the upper indices can be any transfinite ordinal numbers, and where each interval is a part of the one preceding it.

Since the cardinal number of P is $\aleph_0$, all the indices must remain inferior to some definite ordinal number of the *second* number class. For, if not, there would be determined a part of P of cardinal number at least $\aleph_1$. Consequently, in the above process of the formation of intervals, we either arrive at a term r of P of the kind required, or we can, if P is contained in the aggregate formed by closing P, determine a term of this closed aggregate (which may, in some cases, be a term of P) such that its correspondent in the closed aggregate containing Q is between q and q_1. Then,

*) We do not, of course, assume that p and p_1 have the relation of 'distance' but merely that of some order.

since the term of the first closed aggregate is a Limes of P, we can evidently also find a term r of P as required.

Hence:

(C) If P is of type η, and Q consists of more than one term, Q is (in its order) of type η.

Consequently also:

(D) If P is of type θ, and Q consists of more than one element, Q is of type θ.

5.

All the theorems of the preceding section belong to the purely ordinal theory of functions. On the other hand, those properties of continuous functions of real variables such as that of being "uniformly continuous" when continuous at every point of a perfect aggregate P,*) and that of taking any value at least once between its upper and lower limits, are essentially limited to aggregates of real numbers.**)

The same is true for the conceptions of differential quotient and of the definite integral.***) These involve, namely, the operations of division, addition, and subtraction in senses which are only defined for real numbers. It is, however, both practicable and important (as I hope to show on another occasion) to investigate these conceptions also for *any* aggregates of real numbers.†)

From these considerations, we can assign with precision the limits of the purely ordinal theory of functions as including all up to (in the order in which the theory of functions is usually treated) the concept, and some deductions from the concept, of continuous function.

It may be noticed that theorem (A.) contains what is, when the aggregates are aggregates of real variables, *Weierstrass'* theorem that a continuous function attains its upper and lower limits. For the limits are Limites, and the classes of Limites of P and Q are contained respectively in P and Q. Buth further, if P is not closed, the function need not attain

*) *Schönflies*, *op. cit.*, p. 119.

**) Cf. theorem (D) of § 4 above.

***) Cf. *Russell*, *op. cit.*, p. 326—330.

†) Cf. § 2 of Part I above.

	Left	Right
Upper	$L^-(x)$	$L^+(x)$
Lower	$L_-(x)$	$L_+(x)$.

If, now,

$$(2.)\qquad L^-(x) = L_-(x),$$

we have "continuity on the left of x", and the common Limes is denoted $L^-_-(x)$. Similarly for continuity on the right and $L^+_+(x)$. In fact, (2.) is the necessary and sufficient condition for the occurrence of the state of things described in § 3.

On the other hand, if

$$(3.)\qquad L^-(x) = L^+(x),$$

or

$$(4.)\qquad L_-(x) = L_+(x),$$

we have a purely ordinal conception of *Baires* "semi-continuity"*) and (3.) characterises *upper* semi-continuity while (4.) characterises *lower* semi-continuity. Thus *Baires* conceptions appear as the complementary cases of ordinary continuity.

It is evident that if $f(x)$ is continuous on each side of x and (3.) holds, the function is continuous on both sides of x, or

$$L^-_-(x) = L^+_+(x).$$

Part III.

The aggregates of definit on of one-valued analytic functions of a complex variable, and allied questions.

The mathematically most important problem arising from the consideration of the theory of functions from the ordinal point of view is the investigation of the aggregates of definition of one-valued analytic functions of one complex variable.**) In the following, by the word 'function', merely, I always understand a function of this class.

---

*) Ann. di Mat. (3.), III, (1899), p. 5—6; *Schönflies, op. cit.*, p. 140—142.

**) Cf. above, Part I, § 5.

*Weierstrass**) was the first to give the necessary and sufficient conditions that two such functions should be identical. Firstly, when two power-series

$$\mathfrak{P}_1(z) \quad \text{and} \quad \mathfrak{P}_2(z)$$

both converge within a circle round some point $z = a$ and have equal values for a sequence of points

(1.) $$a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

such that: firstly, all the points of (1.) are contained within the said circle; and, secondly, the points (1.) condense at $z = a$ and at $z = a$ only; then

(2.) $$\mathfrak{P}_1(z) = \mathfrak{P}_2(z)$$

for every point z within the circle. Further, if (1.) is a *finite* aggregate, we cannot, in general, conclude the equality (2.). When, now, the continuations of $\mathfrak{P}_1(z)$ and $\mathfrak{P}_2(z)$, — the aggregates of which define respectively two functions $f_1(z)$ and $f_2(z)$, — are taken into consideration, we have the theorem:

If $z = a$ is any point about which $f_1(z)$ and $f_2(z)$ are regular, — and then consequently there is a circle round $z = a$ about every point within which circle both $f_1(z)$ and $f_2(z)$ are regular; if, further,

$$a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

is a sequence of points wholly contained within this circle, condensing at $z = a$, and here only; and if, finally,

$$f_1(a_\nu) = f_2(a_\nu); \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

*) *Weierstrass*, in his lectures, strongly emphasized the fact that may be thus expressed, by introducing the conception of the "aggregates of definition": An aggregate of definition of a one-valued analytic function of a complex variable is any aggregate of points within a circle of regularity and condensing only at the centre of this circle. *Hilbert* (Gött. Nachr. (geschftl. Mitt.), 1897, p. 62—63) says: „Für die Weiterentwickelung der Theorie sieht *Weierstrass* das Wesentliche und Wertvolle seiner Definition der analytischen Function in dem Umstande, daß eine jede durch eine analytische Gleichung ausgedrückte Eigenschaft der Funktion, wenn sie für einen noch so kleinen Bereich der complexen Veränderlichen erfüllt ist, notwendig für den ganzen Definitionsbereich gilt. Diese Tatsache würde, wie *Weierstrass* an Beispielen zeigt, nicht statthaben, sobald man die Function etwa durch einen analytischen Ausdruck oder durch eine beliebige unendliche Reihe von rationalen Functionen definieren würde". Cf. also *Borel*, „Leçons sur la théorie des fonctions", Paris, 1898, p. 94, 100—101.

then these are the necessary and sufficient conditions that

$$f_1(z) = f_2(z)$$

throughout the whole of the common domain of existence of these functions, and their domains of existence are, of course, identical. In other words, the functions are identical:

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Consequently, an aggregate of definition of a function $f(z)$ of the class considered is any (enumerable) aggregate

$$(3.) \qquad a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

of points within a circle of regularity round any regular point $z = a$ and condensing at $z = a$ and here only.*) That is to say, the datum of the values

$$(4.) \qquad f(a_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

is both necessary and sufficient for the full determination of $f(z)$.**)

From the datum of the values (4.) we must, then, be able to construct $f(z)$. Accordingly, we have first the question:

A. If such a $f(z)$ exists, how is the value for a regular point z not occurring in (3.) calculated?

Inversely, we may attempt, without assuming the existence of $f(z)$ to prove its existence by constructing it from the given data (4.).***) But, if a is a regular point, the sequence (4.) cannot be assumed arbitrarily. If, in fact the sequence (4.) could be chosen arbitrarily, $z = a$ would be an essential singularity.†) Making, then, the unessential modification that a is the point infinity, we have the problems:

---

*) We always suppose (3.) to be arranged in such a way that always

$$|a_\nu - a| \leq |a_{\nu-1} - a|.$$

**) It is to be noticed that it is not asserted that, if an aggregate of definition of a function of nature not given is of the above type, then the function is analytic. In fact it appears that this assertion is untrue (Cf. *Borel*, „Leçons sur la théorie des fonctions", Paris 1898, p. 94, 100, 101.)

***) The necessary and sufficient restriction on the given sequence (4.) are due to *Bendixson* and are referred to in § 5 below.

†) For a could neither be a regular nor a non-essential point, for then the limit-point of (4.) would have to be one determined finite number, or always infinite, however the sequence (2.) condensing at a is chosen; and hence (4.) could not be chosen wholly arbitrarily.

B. Does there always exist a whole transcendental function $G(z)$ such that, when

$$a_1, a_2, \dots a_\nu, \dots$$

is any infinite sequence of numbers of non-decreasing absolute amounts and condensing only at infinity,

$$G(a_\nu) = u_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

where

$$u_1, u_2, \dots u_\nu, \dots$$

is any arbitrarily prescribed sequence?

C. If so, what is the most general form of such a function, since it is evidently not unique (whereas the function of problem A is so)?

These three problems are all completely solved in what follows; A in §§ 2—4, C in § 8, and B, in the affirmative, in § 10. Of these problems, while, as I have since found (cf. § 5) with respect to A, only the form in which it appears here (as answering the question as to the dependence of a function upon its values at an aggregate of definition) is new, the problems B and C have not, so far as I know, been generally solved; and their solution provides a general answer to a problem of which, as I have shown in § 7, various particular solutions have been given; which solutions, due for the most part to *Wallis* and *Euler*, have had an important influence on the development of mathematics.

The chief point in the method used in what follows is the derivation of the solutions of both the problems A and B by generalisations in different directions of the formula of interpolation of *Lagrange*. In the problem A, where the function $f(z)$ is supposed to exist, and a development of $f(z)$ is required, we use the methods of the function-theory of *Cauchy*, which is simpler (if not, indeed, indispensable) in such cases. In the problem B, on the other hand, where the problem is to prove the existence of a function by actually constructing it, we cannot use *Cauchy*s integral-formula (for this presupposes the existence of the function) and must use the methods followed in analogous constructions by *Weierstrass* and *Mittag-Leffler*.

As regards the other sections of this third Part; § 6 is occupied with the proof that, although the expansion of § 2 is an analogue of *Taylor*s series, there is no analogue of *Laurent*s series; and in § 12 the cardinal number of all whole transcendental functions is determined directly from the

existence of a function satisfying the conditions of problem B. The method used is connected with a problem on cardinal numbers which is dealt with more fully elsewhere.

1.

When the aggregate (3.) is finite, and consists of n points, we may take n values

$$u_1, u_2, \dots u_n$$

quite arbitrarily, and can then construct a rational whole function $f(z)$ such that

$$f(a_\nu) = u_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots n) \tag{5.}$$

by the well known interpolation-formula of *Lagrange*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\varphi(z)}{(z-a_\nu)\varphi'(a_\nu)}, \tag{6.}$$

where

$$\varphi(z) = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n).$$

In this case, namely that case where an aggregate of definition is finite, we can always construct by the formula (6.) a rational and whole function $f(z)$ of degree $n-1$, satisfying the equations (3.), whatever the finite, real or complex, numbers u_ν, may be; and further there is evidently only one such function.*)

This case is, then, completely resolved. To pass to the case where the aggregate (3.) is infinite, we make, first of all, the supposition that the aggregate (u_ν) is so determined that a function $f(z)$ satisfying the conditions (5.), which are now, however, infinite in number, does exist; we have, then,

*) A whole *transcendental* function which takes the values (u_ν) at the points (a_ν) $(\nu = 1, 2, \dots n)$ is obviously not unique, and the most general form of such functions is easily constructed as a case of the more general expression in § 8.

As regards rational functions in general, whose aggregates of definition are also always finite, the rational function may be constructed by the extension of *Lagranges* interpolation-formula due to *Cauchy*. This extension is, however, subject to an exception which was first pointed out by *Kronecker* (see *Netto*, Math. Ann., Bd. XLII, (1893), p. 453—456). I will return to this point on another occasion (when extending the investigations of §§ 7—11 to the case of meromorphic functions).

to determine how this function $f(z)$ can be constructed from merely the data of the aggregate (a_ν) and (u_ν).

2.

This problem is, as was indicated in Part I, § 5, to generalise the formula (6.) to the case of n infinite. For this purpose it is convenient, to show the convergence of the sum (6.), to express the difference between $f(z)$ and the polynomial coinciding with it for n points (a_ν) as a contour-integral; this form, which was already given by *Cauchy**) in his symbolism of the calculus of residues, and rediscovered by *Hermite***) and by *Heine****) is obtained as follows.

If $z=z_1$ is a simple zero of a function $\varphi(z)$, and C_1 is a simple contour enclosing this point and no other singularities of

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)},$$

then evidently

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)\,dt}{\varphi(t)}=\frac{f(z_1)}{\varphi'(z_1)}.$$

We have, now, to get a contour-integral expression for a term in *Lagranges* formula, namely

$$\frac{f(z_1)}{(z-z_1)\,\varphi'(z_1)}.$$

Evidently, where z is any other point within C_1,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)\,\varphi(t)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)\,\varphi(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)\,\varphi(t)},$$

where γ is a small circle round the point z, lying wholly within C_1, but excluding z_1, and γ' is a small circle round z_1, lying wholly within C_1 but excluding z. That is to say

*) „Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal"; Exercices d'Analyse ..., (1826), I. p. 11—24.

**) „Lettre de M. *Hermite* à M. *Borchardt* sur la formule d'interpolation de *Lagrange*", dieses Journal, Bd. LXXXIV (1878), p. 70—80.

***) „Einige Anwendungen der Residuenrechnung von *Cauchy*", dieses Journal, Bd. LXXXIX (1880), p. 19—39.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)\,\varphi(t)}=\frac{f(z)}{\varphi(z)}+\frac{f(z_1)}{(z_1-z)\,\varphi'(z_1)}.$$

Thus, if C_ν be a simple contour enclosing the zero $z=a_\nu$ of $\varphi(z)$, and this zero alone, then

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}-\frac{f(a_\nu)}{(z-a_\nu)\varphi'(a_\nu)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)\varphi(t)},$$

where z is any other point within C_ν, and where the sense of integration is, as usual, positive.

Consequently

$$(7.)\qquad f(z)-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f(a_\nu)\,\varphi(z)}{(z-a_\nu)\varphi'(a_\nu)}=\frac{\varphi(z)}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)\varphi(t)},$$

where C is a simple contour enclosing the points $a_1, a_2, \dots a_n$ and z; and this gives a contour-integral expression for the remainder after n interpolations; that is to say, after taking from $f(z)$ the polynomial of degree $(n-1)$ which coincides with $f(z)$ at the points

$$a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n.$$

Now, when n increases indefinitely, the right-hand side of (7.) tends to zero, provided that the sequence (2.) condenses at the point a, and here alone. For then

$$|z-a|<|t-a|,$$

where t is any point on C, which is to be a circle round a and enclosing all the points of (3.), and z is any point within the circle C; and, consequently, when the point z is fixed for all points a_ν, after some definite $\nu=m$,

$$|z-a_\nu|<|t-a_\nu|.$$

Accordingly, the integrand tends to zero when n tends to infinity, because

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\varphi(z)}{\varphi(t)}\right|=\left|\frac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_\nu)\dots}{(t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_\nu)\dots}\right|$$

does so.

We may now expand $f(z)$ by the help of the contour-integral expression (7.) for the remainder $R_n(z)$ after n interpolations. For we have

identically

$$f(z) = f(z) - R_1(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [R_\nu(z) - R_{\nu+1}(z)],$$

whence, replacing all the terms on the right by their expressions as contour-integrals,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \left[\frac{1}{t-z} - \frac{z-a_1}{(t-z)(t-a_1)}\right] dt$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} \left[\frac{\varphi_\nu(z)}{\varphi_\nu(t)} - \frac{\varphi_{\nu+1}(z)}{\varphi_{\nu+1}(t)}\right] dt.$$

where

$$\varphi_\nu(z) = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_\nu).$$

Thus, finally, $f(z)$ may be developed in the form

$$(8.) \quad \begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(t)\cdot dt}{t-a_1} + \frac{z-a_1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\cdot dt}{(t-a_1)(t-a_2)} + \cdots \\ \quad + \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_\nu)}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(t)\cdot dt}{(t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_{\nu+1})} + \cdots. \end{cases}$$

3.

The development (8.) may now be obtained in a simpler way. Let a be the point of condensation of the sequence (2.), and let C be a circle round this point enclosing all the points of (2.); then, if z is any point interior to C, the function $f(z)$ can be found from its values on C by *Cauchys* integral-formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\cdot dt}{t-z}.$$

In order to develop $f(z)$ in the form (8.)

$$(9.) \quad f(z) = c_0 + (z-a_1)c_1 + \cdots + (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_\nu)c_\nu + \cdots;$$

we have only to develop $\frac{1}{t-z}$ in this form. Now

$$(9^a.) \quad \frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a_1} + \frac{(z-a_1)}{(t-a_1)(t-a_2)} + \cdots,$$

an absolutely and uniformly convergent series; and by integration of this series term by term the result (8.) follows.

4.

The coefficients c_ν of (9.) may, now, be brought into a form independent of contour-integrals.

We have

$$(9^b.)\qquad c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\cdot dt}{(t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_{\nu+1})},$$

whence, by resolving the integrand into rational fractions,

$$(10.)\quad c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\cdot dt}{\varphi'_{\nu+1}(a_1)(t-a_1)} + \dots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\cdot dt}{\varphi'_{\nu+1}(a_{\nu+1})(t-a_{\nu+1})}.$$

But, by *Cauchys* integral-formula, we can transform the terms of (10.) and so arrive at the result:

$$(11.)\qquad c_\nu = \frac{f(a_1)}{\varphi'_{\nu+1}(a_1)} + \dots + \frac{f(a_{\nu+1})}{\varphi'_{\nu+1}(a_{\nu+1})}. \qquad (\nu=1,2,\dots)$$

Further,

$$c_0 = f(a_1);$$

so that the final result of the problem A is:

If a one-valued function $f(z)$, regular about the point $z=a$ and such that for a certain (enumerable) aggregate of definition (a_ν) condensing at $z=a$, and here only, it takes (at the respective points) the assigned values (u_ν), exist, it can at once be constructed *merely* from the knowledge of the aggregates (a_ν) and (u_ν) by the expansion

$$(12.)\qquad u_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(z),$$

where

$$\varphi_\nu(z) = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_\nu),$$

and c_ν is given by (11.), which is absolutely and uniformly convergent for all points z within a circle C round the point $z=a$ and of radius such that all the points (a_ν) are inside it.

5.

The formula (12.), when the aggregate (a_ν) is finite, becomes the interpolation-formula of *Newton* and *Gauss*. Here, then, the latter formula and its extension, when n is infinite, have been deduced from the interpolation-formula of *Lagrange*; and, in some following sections (§§ 9—11), I shall show that, if we start from *Lagranges* formula, the generalisation of the interpolation formula in another direction is immediate.

Peano, with whose work*) on the subject I subsequently became acquainted, had, already in 1883, obtained the development (8.) by expressing the coefficients of the *Newton-Gauss* formula (n finite) in the form of contour-integrals, and then proving that the development converges when n is infinite in a number of cases, among which is the case considered by us of $f(z)$ being one-valued and analytic. The same point of view was taken, independently of *Peano*, in a memoir of 1886, by *Bendixson*.**) Here *Bendixson* not only gives the formula (8.), which he obtains as I have done in § 3, but investigates generally the convergence of series of the form

$$(13.)\qquad B_0+\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_\nu),$$

where the points (a_ν) condense at $z=a$, and proves that they have much analogy with the power-series

$$\mathfrak{P}(z-a).$$

Thus, if (13.) converges for $z=z_1$, it converges absolutely and uniformly for every z such that

$$|z-a|<|z_1-a|.$$

*) „Sulle funzioni interpolari“, Atti della R. Accademia di Torino, XVIII, (1883). On rational, whole "interpolatory functions" see *Genocchi*, *ibid.*, XIII, (1878), and *Genocchi-Peano*, „Calcolo differenziale . . .“ p. 90.

**) „Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de *Gauss*", Acta Math., IX, (1886—87), p. 1—34. To judge from some previous notes („Sur la formule d'interpolation de *Lagrange*“, Compt. rend., t. ci. (1885), p. 1050—1053, 1129—1131), *Bendixson* seems to have been led to the formula (8.) from the consideration of *Hermites* contour-integral expression for the difference $f(z)-F_\nu(z)$ (see (7.)). Although the contents of § 2 of this Part have thus also been anticipated, I still think my exposition is not quite superfluous, inasmuch as both the problems A and B are solved by different extensions of the *same* (*Lagrangian*) formula; while *Bendixson* was not able to solve the problem B in its generality on his basis of the *Gaussian* formula.

For such a z, (13.) represents part of an analytic function $f(z)$, and consequently the convergence of (13.) supplies the condition that a $f(z)$ should exist. Consequently, the necessary and sufficient condition that a function $f(z)$ which takes the values (u_ν) at the aggregate (a_ν) described above, is the convergence of the series (13.) for some value z on a circle enclosing all the points of (a_ν).

Thus the two problems of calculating $f(z)$ from its aggregate of definition and (u_ν) and of finding what values of (u_ν) are permissible for such a function $f(z)$ to exist are solved, and the calculation is immediate for points within a certain circle round $z=a$.*)

6.

If, now, in analogy with *Laurents* theorem, we try to develop $f(z)$, which is regular within the ring formed by the two circles C_1 and C_2, of

---

*) For the sake of completeness I add that series of the form (13.) has already been considered by *Frobenius* („Über die Entwicklung analytischer Funktionen in Reihen, die nach gegebenen Funktionen fortschreiten", this Journal, Bd. LXXIII (1871), p. 130), who, however, does not appear to have remarked the connexion of such series with the extended problem of interpolation. Also, his remark that the development (8.) is not unique may lead to an error. He remarks, in effect, that the development (9^a.) also holds within a circle c' round a and including the points $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ but excluding $a_n, a_{n-1}, \dots a_1$; and c_ν is not, in general, equal to c'_ν, where c'_ν is the integral (9^b.) where the path of integration is c'. But we observe that

$$c'_1 = c'_2 = \cdots = c'_{n-1} = 0,$$

and

$$c'_n = \frac{f(a_{n+1})}{\varphi'(a_{n+1})}, \dots;$$

so that, although c'_ν is not, in general, equal to c_ν; the developments (12.) *differ in form* by the first n terms of $\sum c'_\nu \varphi_\nu(z)$ being absent. That the development (12.) is unique if no term is zero results from the uniformity of the convergence of (12.).

With regard to the memoir of *Pincherle*, to which I have referred in a note to § 5 of Part I, the extension of the interpolation-formula there given appears to me (as I have said in that note) to apply to an unnecessarily complicated case.

Finally, *Borel* („Sur l'interpolation", Compt. rend., t. CXXIV, (1897), p. 673—676) has dealt with a particular case of problem B, — namely, that in which we suppose the convergence of $\sum \left| \frac{u_\nu}{a_\nu \cdot \varphi'(a_\nu)} \right|$, — and the restrictions which make the solution of the interpolation problem unique (cf. § 8).

which C_1 is the greater, we find

$$(14.) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(t)\cdot dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(t)\cdot dt}{t-z},$$

and $\frac{1}{t-z}$ may be developed in the two ways

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a_1} + \frac{z-a_1}{(t-a_1)(t-a_2)} + \cdots + \frac{1}{t-z}\cdot\frac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}{(t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n)},$$

and

$$\frac{1}{t-z} = -\left\{\frac{1}{z-a_1} + \frac{t-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)} + \cdots + \frac{1}{z-a}\cdot\frac{(t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}\right\}.$$

It is necessary, then, to investigate when the two remainders

$$R_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z}\cdot\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(t)}\,dt,$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(t)}{t-z}\cdot\frac{\varphi_n(t)}{\varphi_n(z)}\,dt$$

both converge to a zero limit when n becomes infinite. That this may be so, we must have, where t_1 denotes a point on C_1 and t_2 one on C_2, both

$$\min|t_1-a| \geqq \max|z-a|$$

and

$$\min|z-a| \geqq \max|t_2-a|,$$

where a is the point of condensation of (a_ν); and this implies that a must be at the common centre of C_1 and C_2. Hence the radius of C_2 must be zero, and the projected expansion from (14.) reduces to (8.). There is, then, no analogue to *Laurents* theorem for expansions of the form

$$u_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(z).$$

7.

We now come to the problem B: — Given any (enumerable) sequence

$$a_1, a_2, \dots a_\nu, \dots$$

of different points in the z-plane, arranged in order of non-decreasing absolute amounts and condensing at the point infinity, and here only; to construct

a whole transcendental function $G(z)$ such that

$$G(a_\nu) = u_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

where

$$u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$$

are any prescribed finite real or complex numbers.

It may be remarked that this is the precise statement of a problem of which particular cases have often been solved by mathematicians. *Wallis* propounded and solved the first problem of this nature, which may be stated as follows: — Find the term corresponding to the index $\frac{1}{2}$ in the series

$$(15.) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots,$$

where

$$u_0 = 1, u_1 = \frac{2}{3}, u_2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, u_3 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \ldots.$$

Since, now,

$$u_\nu = \int_0^1 (1 - x^2)^\nu dx,$$

and, consequently,

$$u_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4};$$

the interpolation of the term $u_{\frac{1}{2}}$ in the series (15.) will give an expression for π. In this way, *Wallis* found the infinite product

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}.$$

Euler solved many problems in the „interpolation of series", and, in particular, by an interpolation of the series $u_\nu = \nu!$, for *every* (real) ν, obtained the product

$$u_x = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^x}{1 + \frac{x}{\nu}},$$

which was afterwards denoted $x\Gamma(x)$ by *Legendre*. However, $\Gamma(z)$ is not a whole transcendental function, though $\frac{1}{\Gamma(z)}$ is.*)

*) The works known to me which deal with the methods of interpolating series of *Wallis*, *Newton*, and *Euler* are as follows: *Reiff*, „Geschichte der unendlichen Reihen", Tübingen, 1889; *Cayley*, Quart. Journ. of Math., vol. XXIII (1889), p. 165—169, or „Collected Papers", vol. XIII, p. 22—25; *A. Aubry*, „Sobre la Fórmula de *Wallis*", El Progreso Matematico, 1899.

8.

It is first to be remarked that, if a solution of the problem of § 7 exists, an infinity do. For suppose that $G(z)$ and $G_1(z)$ are any two solutions; then the function

$$G_1(z) - G(z)$$

has zero at least at the points (a_ν), and can consequently be constructed by *Weierstrass*' theorem. The most general whole transcendental function whose zeros are (a_ν) alone is namely,*)

$$(16.)\quad e^{g(z)} P(z) = e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) \cdot e^{\frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{m_\nu}},$$

where $g(z)$ is any whole transcendental function, and m_ν is an integer (which need not always depend on ν) such that

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{-m_\nu}$$

converges. If, now, $H(z)$ denotes any of the whole transcendental functions whose zeros are any enumerable aggregate (b_ν), no point of which coincides with any point of (a_ν), we have, in general,

$$G_1(z) - G(z) = e^{g(z)} \cdot P(z) \cdot H(z).$$

In particular, if the points (b_ν) condense anywhere in the finite part of the plane,

$$H(z) \equiv 0,$$

and consequently

$$G_1(z) \equiv G(z).$$

But, dismissing this case, since the function

$$G(z) + e^{g(z)} \cdot P(z) \cdot H(z)$$

evidently takes the same values for (a_ν) as $G(z)$ does, it follows that if some one whole transcendental function $G(z)$, which takes the values (u_ν) at the points (a_ν) exists, every other whole transcendental function which

*) We assume that a_1 is not the point $z = 0$. If it were, the expression (16.) would only have to be multiplied by z.

takes the same values at these points is included in the class represented by

$$(17.)\qquad G_1(z) = G(z) + e^{g(z)} \cdot P(z) \cdot H(z).$$

9.

The problem, then, reduces to the requirement of the construction of any *one* such function $G(z)$; and, for this purpose, we shall recall the principle in which a whole rational function $g(z)$ such that

$$g(a_\nu) = u_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

is constructed by *Lagranges* interpolation-formula. This formula gives

$$(18.)\qquad g(z) = \varphi(z) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{u_\nu}{(z - a_\nu)\,\varphi'(a_\nu)};$$

that is to say, $g(z)$ (of degree $n-1$) is formed by the multiplication of a whole rational function, $\varphi(z)$, with zeros at (a_ν), and a rational function with non-essential singularities at (a_ν); the order of these singularities being such that

$$\lim g(a_\nu) = u_\nu.$$

The method of multiplication of two functions to form a whole transcendental function has been used in the particular case of forming a function $G(z)$ which takes the value $(\nu-1)!$ when z takes the positive integral value ν, by *Hadamard.**) This construction thus gives a particular solution of the problem from which *Euler* obtained the function $\Gamma(z)$; but it is to be observed that the function $\frac{1}{\Gamma(z)}$ affords a solution of the problem when

$$a_\nu = \nu,\; u_\nu = \frac{1}{(\nu - 1)!},$$

and $\Gamma(z)$, since it is not whole, does not give a solution at all. The full answer to *Eulers* and *Hadamards* problems can at once be given from the considerations in the preceding section (§ 8).

10.

The construction of $G(z)$ in general may now be given. One of the whole transcendental functions with (simple) zeros at (a_ν) is constructed

*) „Sur l'expression du produit $(n-1)!$ par une fonction entière", Bull. des sc. math. (2.), t. XIX (1895); p. 69—71.

by *Weierstrass'* theorem, and is

$$(19.)\qquad \psi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)\cdot e^{\frac{z}{a_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{m_\nu}}.$$

Such a function is not unique — as was the case with $\varphi(z)$ — but we only require here any one such function.

The construction of a meromorphic function, $f(z)$, which has (simple) non-essential singularities at (a_ν) only, an essential singularity at infinity only, and is such that

$$(20.)\qquad \lim_{z=a_\nu} \psi(z)\cdot f(z) = u_\nu,$$

or that $f(z)$ becomes infinite at $z=a_\nu$ like

$$G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) = \frac{u_\nu}{(z-a_\nu)\psi'(a_\nu)},$$

or, lastly, that, in the neighbourbood of $z=a_\nu$,

$$f(z) - G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) = \mathfrak{P}(z-a_\nu),$$

can always be constructed by the theorem of *Mittag-Leffler*. In fact we have

$$G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) = -\frac{u_\nu}{a_\nu\cdot\psi'(a_\nu)}\left[1+\frac{z}{a_\nu}+\cdots+\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^n+\cdots\right],$$

the series on the right converging uniformly so long as $\left|\frac{z}{a_\nu}\right|<1$. Given, then, a positive number ε_ν, as small as wished, we can always find an integer p_ν so great that

$$\left|G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)+\frac{u_\nu}{a_\nu\cdot\psi'(a_\nu)}\sum_{i=0}^{p_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^i\right|<\varepsilon_\nu;$$

and a meromorphic function fulfilling the conditions required is

$$(21.)\qquad f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)+\frac{u_\nu}{a_\nu\cdot\psi'(a_\nu)}\sum_{i=0}^{p_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^i\right].$$

11.

The interpolation-formula of *Lagrange*, when generalised from the formula (18.) to the case of a whole transcendental function $G(z)$ in general,

is, then, by (19.), (20.), (21.) and (17.),

$$(22.)\quad G(z)=\psi(z)\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_\nu}{\psi'(a_\nu)}\left\{\frac{1}{z-a_\nu}+\frac{1}{a_\nu}\sum_{i=0}^{p_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^i\right\}\right]+e^{g(z)}\cdot\psi(z)\cdot H(z);$$

where all the functions but two occurring on the right are of determinate form, providing that we specialise, as we can always easily do, the numbers m_ν and p_ν, but the functions $g(z)$ and $H(z)$ are arbitrary except as regards the restrictions placed upon them in § 8.

By the above formula (22.) the problems B and C are completely solved for the most general case.

12.

Finally, it may be noticed that, from the fact that a solution of problem B always exists, we can prove directly that the cardinal number of all whole transcendental functions is

$$2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

This follows most simply from the fact that there is always a whole transcendental function $G(z)$ such that, when z is the positive integer ν, $G(z)$ is either (by some law) 0 or 1. If, then, $\mathfrak{f}$ is the cardinal number of all whole transcendental functions,

$$\mathfrak{f}\geqq 2^{\aleph_0};$$

since, moreover (Part I, § 3)

$$\mathfrak{f}\leqq 2^{\aleph_0},$$

we have

$$\mathfrak{f}=2^{\aleph_0}.$$

From the above correspondence of a certain part of the aggregate of whole transcendental functions with the totality of real numbers $0<x<1$, where x is represented in the binary system

$$x=0,\, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu\ldots, \qquad (\alpha_\nu=0 \text{ or } 1)$$

we can also conclude the result: The form of the function f, where

$$\alpha_\nu=f(\nu),$$

cannot, in general, be *rational*, but it is sufficient that it be *whole* and transcendental.

Über einige Entwicklungen auf dem Gebiete der unvollständigen *Euler*schen Integrale zweiter Art.

Von Herrn *M. Lerch* in Freiburg (Schweiz).

1. Es werde durch die Potenzentwicklung

$$(1.)\qquad \frac{1}{1-v\log(1+z)} = C_0(v) + C_1(v)z + C_2(v)z^2 + C_3(v)z^3 + \cdots$$

eine unendliche Reihe von ganzen rationalen Funktionen $C_n(v)$ definiert. Wir wollen zunächst zeigen, daß $C_n(v)$ bei wachsendem n endlich bleibt, wenn v positiv und kleiner als $\frac{1}{\log 2}$ ist. Dies ergibt sich mit Hilfe der Darstellung

$$(2.)\qquad C_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ni\varphi}\,d\varphi}{1-v\log(1+re^{i\varphi})},$$

in welcher r eine positive, reelle, hinreichend kleine Größe bedeutet. Die Funktion der komplexen Variablen $z=re^{i\varphi}$

$$(3.)\qquad \frac{1}{1-v\log(1+z)}$$

kann innerhalb des Einheitskreises $r \leqq 1$ keine anderen singulären Stellen besitzen, als die außerwesentlichen, welche durch Nullsetzen des Nenners definiert sind. Für solche ist

$$\log(1+z) = \frac{1}{v},\quad z = e^{\frac{1}{v}} - 1,$$

und sie sind nicht vorhanden, wenn der absolute Betrag der letzten Größe die Einheit übertrifft. Alsdann bleibt die Größe (3.) auch für $r=1$ endlich,

für jeden Wert von φ. Letzterer Umstand tritt eben bei der Bedingung $v<\frac{1}{\log 2}$ ein; nimmt man dieselbe als erfüllt an, so ist in (2.) der Grenzübergang zu $r=1$ gestattet, und man erhält

$$(2^1.)\qquad C_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ni\varphi}\,d\varphi}{1-v\log\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{2}iv\varphi}.$$

Nach bekannten Sätzen über Koeffizienten der *Fourier*schen Reihe folgt hieraus

$$(2^2.)\qquad \lim_{n=\infty} C_n=0,$$

womit das behauptete Verhalten der C_n bewiesen ist. Für die Anwendungen ist es jedoch nützlich zu bemerken, daß für jeden Wert von n

$$(2^3.)\qquad |C_n|<\frac{1}{1-v\log 2}$$

ist; dies folgt aus dem Umstande, daß die Funktion

$$\left[1-v\log\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2+\frac{1}{4}v^2\varphi^2$$

in den Grenzen $-\pi$ und π nur ein Minimum besitzt, und zwar für $\varphi=0$. Es sei nun x eine positive Veränderliche, und man setze in (1.)

$$z=e^{-x}-1;$$

dadurch ergibt sich die Identität

$$\frac{1}{1+vx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu(e^{-x}-1)^\nu.$$

Ich bezeichne mit u und a komplexe Größen mit positiven reellen Teilen, multipliziere die beiden Seiten der vorstehenden Gleichung mit

$$e^{-ux}x^{a-1}\,dx,$$

und integriere zwischen den Grenzen Null und Unendlich. Indem ich beachte, daß sich unter Anwendung der üblichen Schreibweise

$$\Delta f(u)=f(u+1)-f(u),\quad \Delta^{n+1}f(u)=\Delta^n f(u+1)-\Delta^n f(u),$$

aus der Gleichung

$$\int\limits_0^\infty e^{-ux}x^{a-1}\,dx=\frac{\Gamma(a)}{u^a}$$

die Formel

$$(4.) \qquad \int_0^\infty e^{-ux}(e^{-x}-1)^\nu x^{a-1}\,dx = \Gamma(a)\Delta^\nu u^{-a}$$

ergibt, erhalte ich zunächst

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-ux}\frac{x^{a-1}dx}{1+vx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(v)\Delta^\nu u^{-a}.$$

Das Integral links geht nach Substitution $z=vx$ in das folgende

$$\frac{1}{v^a}\int_0^\infty e^{-\omega z}\frac{z^{a-1}dz}{1+z}, \quad \left(\omega=\frac{u}{v}\right),$$

über, welches sich in bekannter Weise durch die Funktion

$$(5.) \qquad Q(s,\omega) = \int_\omega^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx,$$

die von *Euler*, *Legendre*, *Prym*, *Hermite* u. a. untersucht wurde, darstellen läßt. Um dies in einfachster Weise zu zeigen, betrachten wir die Funktion von ω

$$J = \int_0^\infty e^{-\omega(z+1)}\frac{z^{a-1}dz}{1+z};$$

man hat offenbar

$$\frac{dJ}{d\omega} = -\int_0^\infty e^{-\omega(z+1)}z^{a-1}dz = -e^{-\omega}\omega^{-a}\cdot\Gamma(a) = \Gamma(a)\frac{dQ(1-a,\omega)}{d\omega},$$

und hieraus

$$J = \Gamma(a)Q(1-a,\omega),$$

weil beide Größen für $\omega=\infty$ verschwinden. Die eben bewiesene Gleichung

$$(6.) \qquad \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-\omega z}\frac{z^{a-1}dz}{1+z} = e^\omega Q(1-a,\omega)$$

gestattet, unser obiges Resultat in die Form

$$(7.) \qquad e^{\frac{u}{v}}Q\left(1-a,\frac{u}{v}\right) = v^a\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu(v)\Delta^\nu u^{-a}$$

zu setzen. In dieser Relation wird unter v eine positive reelle Größe, die unter $\frac{1}{\log 2}$ bleibt, verstanden, ferner werden die reellen Teile der komplexen Veränderlichen a und u positiv angenommen.

Für die Anwendungen kämen wohl die Fälle, wo die Veränderlichen reell sind, zunächst in Betracht. Wir wollen uns daher bei der Fehlerabschätzung auf positive reelle a und u beschränken, und nehmen sogar $u > 1$ an.

Es handelt sich um die Abschätzung des Restes

$$R_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} C_\nu \Delta^\nu u^{-a}; \tag{8.}$$

zu dem Behufe benutzen wir die Formel (4.), d. h.

$$\Delta^\nu u^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ux}(e^{-x}-1)^\nu x^{a-1}\,dx,$$

aus der sich nebenbei ergibt, daß die Größen

$$(-1)^\nu \Delta^\nu u^{-a}$$

positiv sind. Verstehen wir unter g eine positive Größe, welche durch keine der Größen

$$|C_n|,\ |C_{n+1}|,\ |C_{n+2}|, \ldots$$

übertroffen wird, was z. B. wegen (2³.) immer für

$$g = \frac{1}{1 - v\log 2}$$

der Fall ist, so ergibt sich aus (8.)

$$|R_n| < g \sum_{\nu=n}^{\infty} (-1)^\nu \Delta^\nu u^{-a} = \frac{g}{\Gamma(a)} \sum_{\nu=n}^{\infty} \int_0^\infty e^{-ux}(1-e^{-x})^\nu x^{a-1}\,dx,$$

oder, wenn wir die Summation unter dem Integralzeichen ausführen,

$$|R_n| < \frac{g}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-(u-1)x}(1-e^{-x})^n x^{a-1}\,dx.$$

Dies läßt sich einfacher wie folgt schreiben

$$|R_n| < g\,|\Delta^n (u-1)^{-a}|, \tag{8¹.}$$

und zeigt, daß man bei Anwendung der Entwicklung (7.), ausgehend von der Reihe

$$\frac{1}{(u-1)^a},\ \frac{1}{u^a},\ \frac{1}{(u+1)^a},\ \frac{1}{(u+2)^a},\ \frac{1}{(u+3)^a}, \ldots \tag{9.}$$

ihre sukzessiven Differenzenreihen zu bilden hat. Die zweiten Glieder der so gewonnenen Reihen werden zur Bildung der rechten Seite von (7.) gebraucht, während das erste Glied der n-ten Differenzenreihe zur Genauigkeitsabschätzung vermöge der Ungleichung (8'.) zu benutzen ist.

Handelt es sich um die Bestimmung von $Q(1-a, \omega)$, so kann man für u das größte Ganze $[\omega]$ von ω wählen, und nachher $v=\frac{u}{\omega}$ setzen. So wird immer $0 < v < 1$ sein, sobald $\omega > 1$ ist, und man wird sich auf die Berechnung der Differenzenreihen von

$$(9^0.)\qquad 1,\ \frac{1}{2^a},\ \frac{1}{3^a},\ \frac{1}{4^a},\ \frac{1}{5^a},\dots$$

beschränken können, was insofern von Vorteil ist, als hier nur ein Argument vorkommt.

Daß sich bei dieser Einrichtung der Rechnung wieder eine Komplikation bei den Koeffizienten C_ν einstellt, insofern sich die darin vorkommende Größe v mit ω ändert, ist weniger lästig, da diese Funktionen der Rechnung in ziemlich bequemer Weise zugänglich sind.

Es ist nämlich $C_0=1$, und die übrigen C_ν sind ganze rationale Funktionen von v, welche sich wegen (1.) mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(10.)\qquad C_n=v\left(C_{n-1}-\frac{1}{2}C_{n-2}+\frac{1}{3}C_{n-3}-\frac{1}{4}C_{n-4}+\cdots\right)$$

bestimmen lassen; speziell ist

$$C_1=v,\ C_2=v^2-\frac{1}{2}v,\ C_3=v^3-v^2+\frac{1}{3}v,\ C_4=v^4-\frac{3}{2}v^3+\frac{11}{12}v^2-\frac{1}{4}v,$$
$$C_5=v^5-2v^4+\frac{7}{4}v^3-\frac{5}{6}v^2+\frac{1}{5}v.$$

Von der beschränkenden Voraussetzung, daß der reelle Teil von a positiv ist, läßt sich die Relation (7.) befreien. Ist nämlich a irgend eine komplexe Größe, so werden für hinreichend große ν die Ausdrücke

$$\Delta^\nu u^{-a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-ux}(e^{-x}-1)^\nu x^{a-1}\,dx$$

sämtlich existieren, und es läßt sich analog wie oben zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} C_\nu \Delta^\nu u^{-a}$$

in jedem endlichen Bereiche der a-Ebene gleichmäßig konvergiert. Daraus erschließt man nach wohlbekannten Sätzen der Funktionentheorie die Gültigkeit der Gleichung (7.) in der ganzen a-Ebene. Ist speziell a eine negative ganze Zahl $-m$, so wird sich die rechte Seite von (7.) auf ein Polynom reduzieren, und zwar

$$(7^0.)\qquad e^{\frac{u}{v}}Q\left(m+1,\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^m}\cdot\sum_{\nu=0}^{m}C_\nu(v)\Delta^\nu u^m.$$

Ferner ergibt sich aus der letzten Betrachtung, daß man in der Identität

$$v^\xi e^{\frac{u}{v}}Q\left(1+\xi,\frac{u}{v}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu(v)\Delta^\nu u^\xi$$

die Differentiation nach ξ gliedweise ausführen darf; tun wir dies für $\xi=0$, so folgt, da

$$Q(1,\omega)=e^{-\omega},\quad Q'_{\xi=0}(1+\xi,\omega)=\int_\omega^\infty e^{-x}\log x\,dx=e^{-\omega}\log\omega+\int_\omega^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

die Entwicklung

$$\log v+\log\frac{u}{v}+e^{\frac{u}{v}}\int_{\frac{u}{v}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu(v)\Delta^\nu\log u;$$

das erste Glied ($\nu=0$) der rechten Seite lautet $\log u$, und hebt sich gegen den Ausdruck der linken Seite $\log v+\log\frac{u}{v}$ auf; es bleibt so eine Entwicklung des Integrallogarithmus

$$(10.)\qquad e^{\frac{u}{v}}\int_{\frac{u}{v}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}=\sum_{\nu=1}^{\infty}C_\nu(v)\Delta^\nu\log u,\qquad \left(0<v<\frac{1}{\log 2}\right)$$

von deren Gebrauchsweise die obigen Bemerkungen — nur mit der Modifikation, daß die Reihe (9.) durch

$$\log(u-1),\ \log u,\ \log(u+1),\ \log(u+2),\ldots$$

ersetzt wird, — Aufschluß geben.

Ich setze ferner in (7.) $a=1$ und beachte, daß

$$\Delta^\nu\frac{1}{u}=\frac{(-1)^\nu\nu!}{u(u+1)(u+2)\ldots(u+\nu)};$$

so kommt

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{u}{v}\, e^{\frac{u}{v}} \int\limits_{\frac{u}{v}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \\ = 1 - \frac{1\cdot C_1(v)}{u+1} + \frac{1\cdot 2\cdot C_2(v)}{(u+1)(u+2)} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\, C_3(v)}{(u+1)(u+2)(u+3)} + \cdots. \end{cases}$$

Nimmt man hier $v=1$ und setzt $\nu!\, C_\nu(1) = a_\nu$, so ergibt sich die Formel

$$(11^0.)\quad \begin{cases} \omega e^{\omega} \int\limits_{\omega}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \\ = 1 - \frac{a_1}{\omega+1} + \frac{a_2}{(\omega+1)(\omega+2)} - \frac{a_3}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} + \cdots. \end{cases}$$

Die Koeffizienten a_ν werden durch die Entwicklung

$$\frac{1}{1-\log(1+z)} = 1 + \frac{a_1}{1} z + \frac{a_2}{1\cdot 2} z^2 + \frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \cdots$$

bestimmt und haben die Werte

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ a_5 = 14,\ a_6 = 38,\ a_7 = 216,\ a_8 = 600,\ a_9 = 6240, \ldots.$

Die Formel $(11^0.)$ wurde von *Schloemilch* aufgestellt, und zwar als spezieller Fall einer Entwicklung von $Q(1-a, \omega)$, auf die wir demnächst zurückkommen werden.

Die Formeln (7.), (10.), (11.) lassen sich in symbolischer Form wie folgt schreiben, wobei wir zu gleicher Zeit die übliche Schreibweise

$$-\int\limits_{\omega}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} = li(e^{-\omega})$$

benutzen:

$$(7^*.)\quad v^a e^{\frac{u}{v}}\, Q\left(a+1,\ \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1-v\log(1+\Delta)}\, u^a; \qquad (\Delta u = 1)$$

$$(10^*.)\quad -e^{\frac{u}{v}}\, li\left(e^{-\frac{u}{v}}\right) = \frac{v\log(1+\Delta)}{1-v\log(1+\Delta)} \log u; \qquad (\Delta u = 1)$$

$$(11^*.)\quad -e^{\frac{u}{v}}\, li\left(e^{-\frac{u}{v}}\right) = \frac{v}{1-v\log(1+\Delta)} \cdot \frac{1}{u}. \qquad (\Delta u = 1)$$

2. Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich verallgemeinern, wenn wir die Entwicklungskoeffizienten $\Phi_\nu(c, v)$ durch die Gleichung

(12.) $$\frac{1}{(1-v\log(1+z))^c}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)z^\nu,\quad \Phi_0=1,$$

einführen. Nimmt man wieder $0<v<\frac{1}{\log 2}$ an, so werden die Φ_ν wieder in festen Grenzen liegen, wie oben die C_ν, und die Substitution $z=e^{-x}-1$ ergibt

$$\frac{1}{(1+vx)^c}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)(e^{-x}-1)^\nu.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $e^{-ux}x^{a-1}dx$ und integriert zwischen den Grenzen Null und Unendlich, so kommt

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{e^{-ux}x^{a-1}dx}{(1+vx)^c}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)\Delta^\nu u^{-a},\qquad (\Delta u=1)$$

oder wenn wir $\frac{x}{v}$ anstelle von x setzen:

(13.) $$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-\omega x}\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^c}=v^a\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)\Delta^\nu u^{-a}.\qquad \left(\Delta u=1,\ \omega=\frac{u}{v}\right)$$

Wird hier $a=1$ genommen, so geht die linke Seite in

$$\int_0^\infty e^{-\omega x}\frac{dx}{(1+x)^c}=e^\omega\int_1^\infty e^{-\omega x}\frac{dx}{x^c}=\omega^{c-1}e^\omega Q(1-c,\omega)$$

über. Man bekommt also die Beziehung

(14.) $$\left\{\begin{aligned}\omega^c e^\omega Q(1-c,\omega)=1-\frac{1\cdot\Phi_1(c,v)}{u+1}+\frac{1\cdot2\cdot\Phi_2 c(,v)}{(u+1)(u+2)}\\ -\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\Phi_3(c,v)}{(u+1)(u+2)(u+3)}+\cdots,\end{aligned}\right.\qquad \left(\omega=\frac{u}{v}\right)$$

welche ebenso wie (13.) für komplexe Größen u mit positivem reellen Teile und für $0<v<\frac{1}{\log 2}$ stattfindet. Die bei der Beweisführung benutzte Beschränkung, daß der reelle Teil von a in (13.) positiv sei, läßt sich ähnlich wie oben beseitigen.

Für den Fall $v=1$ erhält man aus (14.) die Entwicklung von *Schloemilch* *)

*) Zeitschrift f. Math. u. Physik, 4. Jahrg., S. 390; Vorlesungen über einzelne Teile der höh. Analysis usw., Braunschweig, 1866, S. 266.

$$(14^0.)\quad \begin{cases} \omega^c e^\omega Q(1-c,\omega) = 1 - \frac{A_1}{\omega+1} + \frac{A_2}{(\omega+1)(\omega+2)} \\ \qquad - \frac{A_3}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} + \cdots, \end{cases}$$

wo wir der Kürze wegen

$$A_\nu = \nu!\, \Phi_\nu(c, 1)$$

gesetzt haben. Dabei möge bemerkt werden, daß der an der zweiterwähnten Stelle mitgeteilte Konvergenzbeweis *Schloemilchs* ein Versehen enthält, das ihn vollständig hinfällig macht.

Die Konvergenz aller dieser Entwicklungen ist übrigens ziemlich langsam, wenn nicht etwa $u \geqq 8$ ist. Handelt es sich aber z. B. in der Gleichung (14.) oder (14⁰.) nicht um die Bestimmung der linken Seite, sondern um $Q(1-c,\omega)$ allein, so ist die zu bestimmende Größe das Produkt der sehr kleinen Größe $\omega^{-c}e^{-\omega}$ mit der unendlichen Reihe rechts, für welche man nur eine geringe Anzahl von Stellen braucht, um für das Produkt eine verhältnismäßig große Stellenzahl zu erhalten.

Das an der erwähnten Stelle angeführte Beispiel *Schloemilchs*

$$\int_3^\infty e^{-t^2} dt = 0{,}00001958$$

ist dieser Art, und zwar entspricht es dem Falle $\omega = 9$, $c = \frac{1}{2}$.

Was nun die Darstellung der Ausdrücke $\Phi_n(c, v)$ angeht, so folgt zunächst aus der Identität (12.)

$$(12^0.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(c, v)\, z^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{c+\nu-1}{\nu} v^\nu \log^\nu(1+z).$$

Vergleicht man dies mit der Entwicklung, welche aus (1.) folgt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(v)\, z^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} v^\nu \log^\nu(1+z),$$

so sieht man leicht, daß

$\Phi_n(c, v)$ erhalten wird, wenn in dem nach Potenzen von v geordneten Polynom $C_n(v)$ jedes v^ν durch $\binom{c+\nu-1}{\nu} v^\nu$ ersetzt wird.

Auf diese Art wird erhalten

$$\Phi_1 = cv,\quad \Phi_2 = \frac{c(c+1)}{2} v^2 - \frac{1}{2} cv,\quad \Phi_3 = \frac{c(c+1)(c+2)}{6} v^3 - \frac{c(c+1)}{2} v^2 + \frac{1}{3} cv,$$

$$\Phi_4 = \frac{c(c+1)(c+2)(c+3)}{24} v^4 - \frac{c(c+1)(c+2)}{4} v^3 + 11\frac{c(c+1)}{24} v^2 - \frac{1}{4} cv,$$

$$\Phi_5 = \frac{c(c+1)(c+2)(c+3)(c+4)}{120} v^5 - \frac{c(c+1)(c+2)(c+3)}{12} v^4 + 7\frac{c(c+1)(c+2)}{24} v^3$$
$$-5\frac{c(c+1)}{12} v^2 + \frac{1}{5} cv.$$

Wird ferner

$$(12^1.) \qquad \log^\nu (1+z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_\mu^{(\nu)} z^{\mu+\nu}$$

gesetzt, so ergibt sich aus (12⁰.)

$$(12^2.) \qquad \Phi_n(c, v) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{n-\nu}^{(\nu)} \binom{c+\nu-1}{\nu} v^\nu.$$

Beachtet man schließlich, daß

$$\frac{1}{[1-v\log(1+z)]^c} = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^\infty e^{-x[1-v\log(1+z)]} x^{c-1}\, dx,$$

sobald nur der reelle Teil von c positiv ist und v oder z hinreichend klein sind, so genügt es zu bemerken, daß der unter dem Integralzeichen stehende Exponentialausdruck gleich

$$e^{-x}(1+z)^{vx} = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{vx}{\nu} z^\nu$$

ist, um hieraus nach (12.) die Darstellung

$$(12^3.) \qquad \Phi_n(c, v) = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^\infty \binom{vx}{n} e^{-x} x^{c-1}\, dx$$

zu erhalten.

Wird ferner

$$(12^4.) \qquad n!\binom{z}{n} = z^n - C_1'^{(n)} z^{n-1} + C_2'^{(n)} z^{n-2} - C_3'^{(n)} z^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} C_{n-1}'^{(n)} z \cdots$$

gesetzt, so ergibt sich aus (12³.) zunächst

$$n!\,\Phi_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} v^n - C_1'^{(n)} \frac{\Gamma(c+n-1)}{\Gamma(c)} v^{n-1} + C_2'^{(n)} \frac{\Gamma(c+n-2)}{\Gamma(c)} v^{n-2}$$

oder

$$(12^5.) \quad \begin{cases} n!\,\Phi_n(c, v) = c(c+1)\ldots(c+n-1)\, v^n - C_1'^{(n)} c(c+1)\ldots(c+n-2)\, v^{n-1} \\ + C_2'^{(n)} c(c+1)\ldots(c+n-3)\, v^{n-2} - C_3'^{(n)} c(c+1)\ldots(c+n-4)\, v^{n-3} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1} C_{n-1}'^{(n)} cv. \end{cases}$$

Schließlich ergibt sich mit Hilfe der Entwicklung

$$\text{(15.)} \qquad \frac{\log(1+z)}{[1-v\log(1+z)]^c} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(c, v)\, z^n$$

folgende Darstellung:

$$\text{(16.)} \qquad \omega^{c-1} e^{\omega} Q(1-c, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} v\, \Psi_n(c, v) \Delta^n \log u, \qquad \left(\Delta u = 1;\ \omega = \frac{u}{v}\right)$$

wo wiederum der reelle Teil von u positiv sein muß.

Die ganzen Funktionen $v\Psi_n(c, v)$ entstehen aus den Polynomen $C_n(v)$, wenn man darin die Koeffizienten der einzelnen Potenzen v^ν mit entsprechenden Faktoren $\binom{c+\nu-2}{\nu-1}$ multipliziert.

Die im vorhergehenden überall festgehaltene Voraussetzung

$$0 < v < \frac{1}{\log 2}$$

kann durch die allgemeinere

$$|e^{\frac{1}{v}} - 1| > 1$$

ersetzt werden, welche sich übrigens besonders dann als nützlich erweist, wenn für ω komplexe Werte gesetzt werden sollen.

Zum Schluß bemerke ich, daß Entwicklungen ähnlicher Art, aber für andere Funktionen, wie die hier gegebenen, sich in einem schönen Aufsatz *Hermites**) finden, dessen Ausgangspunkt die aus der Interpolationstheorie bekannte Reihe

$$f(x+\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\xi}{\nu} \Delta^\nu f(x)$$

bildet.

*) Annali di Matematica, 3. Reihe, V. Band, 1901 (Extrait de plusieurs lettres à M. *Pincherle*).

Über eine Gattung n-fach periodischer Funktionen von n reellen Veränderlichen.

Von Herrn *Paul Stäckel* in Kiel.

1.

Herr *Staude* hat, einen von *Weierstraß* für den Fall einer reellen Veränderlichen entdeckten Satz*) auf zwei Veränderliche verallgemeinernd, folgendes Theorem**) bewiesen:

Theorem I. Die Funktionen $\varphi(u), \chi(u), f(u), g(u); \psi(v), \omega(v), h(v), k(v)$ *der reellen Argumente* u *und* v *mögen in dem durch die Ungleichheiten*

$$a \leq u \leq A, \qquad b \leq v \leq B$$

erklärten Gebiete $\mathfrak{G}_2$ *folgenden Bedingungen genügen:*

1. Sie sollen darin sämtlich eindeutig, endlich und stetig sein.

2. Die Funktionen $f(u), g(u); h(v), k(v)$ *sollen darin beständig positiv sein und niemals verschwinden.*

3. Die Funktionen $\varphi(u), \chi(u); \psi(v), \omega(v)$ *sollen darin ihr Vorzeichen niemals wechseln.*

4. Die Determinante

$$D(u, v) = \varphi(u)\,\omega(v) - \chi(u)\,\psi(v)$$

soll darin entweder beständig positiv oder beständig negativ sein und niemals verschwinden.

*) Monatsberichte, Berlin 1866, S. 97—115, 185, Werke, Bd. II, S. 1—18.

**) Math. Ann., Bd. 29 (1887), S. 469—485; vergl. auch dieses Journal, Bd. 105 (1890), S. 298—328.

Setzt man unter diesen Voraussetzungen:

$$x = \int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}},$$

$$y = \int_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)g(u)}} + \int_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)k(v)}},$$

so sind umgekehrt u und v eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente x und y, die überdies gerade und doppelt periodisch mit den Periodenpaaren $2\omega_{11}$, $2\omega_{12}$ und $2\omega_{21}$, $2\omega_{22}$ sind. Dabei ist:

$$\omega_{11} = \int_a^A \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}}, \qquad \omega_{21} = \int_b^B \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}},$$

$$\omega_{12} = \int_a^A \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)g(u)}}, \qquad \omega_{22} = \int_b^B \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)k(v)}};$$

den Wurzeln ist das positive Vorzeichen zu geben.

Veranlaßt durch Untersuchungen über die Integration der *Hamilton-Jacobi*schen Differentialgleichung mittels Separation der Variabeln habe ich dann in § 5 meiner Habilitationsschrift, Halle, 1891*) das Theorem I in folgender Weise auf beliebig viele Veränderliche ausgedehnt:

Theorem II. Die Funktionen:

$$\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa) \quad \text{und} \quad \chi_\varkappa(u_\varkappa) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

der angegebenen reellen Argumente $u_\varkappa$ mögen in dem durch die Ungleichheiten

$$a_\varkappa \leqq u_\varkappa \leqq A_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

erklärten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ folgenden Bedingungen genügen:

1. Sie sollen darin sämtlich eindeutig, endlich und stetig sein.

2. Die Funktionen $\chi_\varkappa(u_\varkappa)$ sollen darin beständig positiv sein und niemals verschwinden.

3. Die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sollen darin ihr Vorzeichen niemals wechseln.

4. Die Determinante

$$D(u_1, u_2, \ldots u_n) = |\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

---

*) Vergl. auch Math. Ann., Bd. 42 (1893), S. 537—563, sowie die Darstellung von *Charlier*, Die Mechanik des Himmels, Bd. 1, Leipzig 1902, Abschnitt 2.

soll darin entweder beständig positiv oder beständig negativ sein und niemals verschwinden.

Setzt man unter diesen Voraussetzungen

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{u_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\chi_\varkappa(u_\varkappa)}}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

so sind umgekehrt $u_1, u_2, \ldots u_n$ *eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *die überdies gerade und n-fach periodisch sind mit den Periodensystemen:*

$$2\omega_{\varkappa 1},\ 2\omega_{\varkappa 2}, \ldots 2\omega_{\varkappa n}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

Dabei ist:

$$\omega_{\varkappa\lambda} = \int_{a_\varkappa}^{A_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\chi_\varkappa(u_\varkappa)}};$$

der Wurzel ist das positive Vorzeichen zu geben.

Da es sich um eine Verallgemeinerung handelte, die an und für sich recht nahe liegt, denn der von Herrn *Staude* für den Fall von zwei Veränderlichen gegebene Beweis läßt sich Schritt für Schritt auf beliebig viele Veränderliche übertragen, und da diese Verallgemeinerung erst durch ihre Anwendung auf dynamische Probleme eine größere Bedeutung gewann,*) habe ich in meiner Habilitationsschrift den Gang des Beweises nur angedeutet. Später hat Herr *Ahrens*, indem er sich an eine Arbeit von Herrn *Kneser*) anlehnte, das allgemeinere Theorem***) bewiesen:**

Theorem III. Die Funktionen

$$\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa) \quad \text{und} \quad \chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

der angegebenen reellen Argumente $u_\varkappa$ *mögen in dem durch die Ungleichheiten*

$$a_\varkappa \leqq u_\varkappa \leqq A_\varkappa$$

erklärten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ *folgenden Bedingungen genügen:*

*) Vergl. dazu auch *J. Horn*, Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage, dieses Journal, Bd. 126 (1903), S. 194—232.

**) Über die Umkehrung der Systeme von Funktionen reeller Variabeln, Math. Ann., Bd. 45 (1894), S. 446—470.

***) Über eine Gattung n-fach periodischer Funktionen von n reellen Veränderlichen, Dissertation, Rostock 1895.

1. Sie sollen darin sämtlich eindeutig, endlich und stetig sein.

2. Die Funktionen $\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sollen darin beständig positiv sein und niemals verschwinden.

3. Die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sollen darin ihr Vorzeichen niemals wechseln.

4. Die Determinante

$$D(u_1, u_2, \dots u_n) = |\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)|, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n)$$

soll darin entweder beständig positiv oder beständig negativ sein und niemals verschwinden.

Setzt man unter diesen Voraussetzungen:

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{u_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)}\, \chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)}, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

so sind umgekehrt $u_1, u_2, \dots u_n$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente $x_1, x_2, \dots x_n$, die überdies gerade und n-fach periodisch sind mit den Periodensystemen

$$2\omega_{\varkappa 1},\ 2\omega_{\varkappa 2}, \dots 2\omega_{\varkappa n}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

Dabei ist

$$\omega_{\varkappa\lambda} = \int_{a_\varkappa}^{A_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)}\, \chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)};$$

der Wurzel ist das positive Vorzeichen zu geben.

Als ich versuchte, die Theoreme I, II, III für Aufgaben der Mechanik nutzbar zu machen, bin ich auf eine erhebliche Schwierigkeit gestoßen. Es stellte sich nämlich dabei heraus, daß zwar die drei ersten Bedingungen ohne weiteres erfüllt waren, dagegen lag es in der Natur jener Aufgaben, daß die Determinante $D(u_1, u_2, \dots u_n)$ für gewisse Punkte des Gebietes verschwand, allerdings ohne das Vorzeichen zu wechseln. Diese Bedingung ist aber ein wesentlicher Bestandteil der von den Herren *Staude* und *Ahrens* gegebenen *Beweise*, die ohne sie alle Kraft verlieren. Auf der anderen Seite zeigten mir besondere Fälle, in denen sich das Umkehrproblem direkt durch wirkliche Darstellung der $u_\varkappa$ als Funktionen der x_λ erledigen ließ, daß die in jenen Theoremen ausgesprochenen Eigenschaften der Funktionen $u_\varkappa$ der x_λ erhalten blieben, obwohl die Bedingung 4 nicht erfüllt war. Auf die Anwendungen für die Dynamik werde ich an anderer Stelle eingehen, hier möchte ich den Beweis eines Theorems mitteilen, das die Theoreme I,

II und III als besondere Fälle in sich enthält, da in ihm die Bedingung 4 durch eine weitere ersetzt ist. Es lautet so:

Theorem IV. Die Funktionen

$$\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa) \text{ und } \chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

der angegebenen reellen Argumente $u_\varkappa$ mögen in dem durch die Ungleichheiten

$$a_\varkappa \leq u_\varkappa \leq A_\varkappa$$

erklärten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ folgenden Bedingungen genügen:

1. Sie sollen darin sämtlich eindeutig, endlich und stetig sein.

2. Die Funktionen $\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sollen darin beständig positiv sein und niemals verschwinden.

3. Die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sollen darin ihr Vorzeichen niemals wechseln; sie dürfen nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Intervalles verschwinden).*

4. Die Determinante

$$D(u_1, u_2, \ldots u_n) = |\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

soll darin ihr Vorzeichen niemals wechseln und, als Funktion einer der Veränderlichen $u_\varkappa$ angesehen, nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Intervalles verschwinden.

Setzt man unter diesen Voraussetzungen

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{A_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\,du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\,\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)}}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

so sind umgekehrt $u_1, u_2, \ldots u_n$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ die überdies gerade und n-fach periodisch sind mit den Periodensystemen:

$$2\omega_{\varkappa 1}, 2\omega_{\varkappa 2}, \ldots, 2\omega_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

Dabei ist

$$\omega_{\varkappa\lambda} = \int_{a_\varkappa}^{A_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\,du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\,\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)}};$$

der Wurzel ist das positive Vorzeichen zu geben.

---

*) Diese Bedingung ist nur scheinbar spezieller als die früheren Bedingungen 3.; in Wirklichkeit wird von den Herren *Staude* (Math. Ann. S. 475) und *Ahrens* (Dissertation, S. 10) stillschweigend dasselbe gefordert.

2.

Dem Beweise schicke ich einige Hilfssätze voraus, die mir auch ein selbständiges Interesse zu haben scheinen.

Um mich kurz ausdrücken zu können, will ich einige Bezeichnungen festsetzen.

Herr *Carl Neumann* hat eine in dem Intervall

$$\xi' \leqq \xi \leqq \xi'',$$

das ich mit (Ξ) bezeichnen werde, eindeutige, stetige und endliche Funktion $F(\xi)$ der reellen Veränderlichen ξ „monoton" genannt, wenn sie, indem ξ das Intervall (Ξ) durchläuft, entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß $F(\xi)$ in einem ganzen Teilintervall von (Ξ) konstant bleibt. Im folgenden werden jedoch nur solche monotonen Funktionen betrachtet werden, die in keinem noch so kleinen Intervall konstant sind, bei denen also die Differenz

$$F(\xi+h) - F(\xi)$$

bei positivem h, wenn ξ das Intervall (Ξ) durchläuft, stets dasselbe Vorzeichen hat und niemals verschwindet*). Da das Wort monoton bereits eine feste Bedeutung gewonnen hat, ist es erforderlich, eine neue Bezeichnung einzuführen, und ich will festsetzen:

Wenn eine Funktion $F(\xi)$ der reellen Veränderlichen ξ in dem Intervall (Ξ) eindeutig, endlich, stetig und so beschaffen ist, daß die Differenz

$$F(\xi+h) - F(\xi)$$

bei positivem h stets dasselbe Vorzeichen besitzt und niemals verschwindet, so soll $F(\xi)$ in (Ξ) *isoton* heißen.

Den isotonen Funktionen kommt eine wichtige Eigenschaft zu, die monotone Funktionen nicht zu besitzen brauchen; ist nämlich $x = F(\xi)$ in (Ξ) isoton, so ist die Umkehrung $\xi = \Phi(x)$ in dem Intervall

$$x = (\Phi(\xi') \dots \Phi(\xi''))$$

wieder eine isotone Funktion.

*) Selbstverständlich muß dabei auch das Argument $\xi + h$ dem Intervalle (Ξ) angehören.

Die isotonen Funktionen stehen in enger Beziehung zu einer zweiten Klasse von Funktionen, die ich so definiere:

Wenn eine Funktion $P(\xi)$ der reellen Veränderlichen ξ in dem Intervall (Ξ) eindeutig, endlich, stetig und so beschaffen ist, daß sie nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Teilintervalles von (Ξ) verschwindet, so soll $P(\xi)$ in (Ξ) *permanent* heißen.

Bildet man aus der in (Ξ) permanenten Funktion $P()$ die neue Funktion

$$F(\xi) = \int_{\xi'}^{\xi} P(\xi)\, d\xi,$$

so ist, wie man sofort beweist, $F(\xi)$ in (Ξ) isoton.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß das Intervall (Ξ) alle endlichen Werte der reellen Veränderlichen ξ umfaßt, daß ξ also *unbeschränkt veränderlich* ist. Wenn die eindeutige, endliche und stetige Funktion $Q(\xi)$ für unbeschränkt veränderliches ξ selbst alle endlichen Werte annimmt, so soll sie *omnipotent* heißen. Alsdann gilt der Satz: Die Umkehrung einer für unbeschränkt veränderliches Argument isotonen omnipotenten Funktion ist wieder eine solche isotone omnipotente Funktion.

Nach diesen Vorbereitungen seien $F(\xi)$ und $G(\xi)$ zwei in (Ξ) isotone Funktionen. Durch die Gleichungen

$$x = F(\xi), \qquad y = G(\xi)$$

wird in der xy-Ebene ein Kurvenbogen C dargestellt. Die Gleichungen

$$x = F(\xi) + a\eta, \qquad y = G(\xi) + b\eta,$$

in denen a und b Konstanten und η einen stetig veränderlichen Parameter bedeuten, lassen sich dann auffassen als die Gleichungen einer Kurvenschar, deren Individuen aus C durch Translationen hervorgegangen sind, die alle in derselben Richtung stattgefunden haben.

Die Kurven der Schar bedecken ein gewisses Gebiet der xy-Ebene. Wann wird dieses Gebiet von ihnen einfach bedeckt? Dafür ist notwendig und hinreichend, daß jede der Geraden

$$x = F(\xi_0) + a\eta, \qquad y = G(\xi_0) + b\eta,$$

die durch einen Punkt $x_0 = F(\xi_0)$, $y_0 = G(\xi_0)$ der Kurve C geht, jede der Kurven der Schar nur in einem Punkte schneidet. Das ist aber der Fall, wenn es

für die Kurve C stattfindet, aus der ja alle anderen durch Translation hervorgehen. Die Schnittpunkte der Geraden

$$x = F(\xi_0) + a\eta, \qquad y = G(\xi_0) + b\eta$$

mit der Kurve C ergeben sich aus den Gleichungen:

$$F(\xi) = F(\xi_0) + a\eta, \qquad G(\xi) = G(\xi_0) + b\eta,$$

aus denen durch Elimination von η folgt:

$$bF(\xi) - aG(\xi) = bF(\xi_0) - aG(\xi_0).$$

Diese Gleichung ist für $\xi = \xi_0$ erfüllt. Sie ist dann und nur dann allein für diesen Wert von ξ erfüllt, wenn die Funktion $bF(\xi) - aG(\xi)$ in (Ξ) *isoton* ist. Das läßt sich aber, da $F(\xi)$ und $G(\xi)$ isoton sein sollten, stets durch geeignete Wahl der Konstanten a und b erreichen; denn ist, wie man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen darf, $a \gtrless 0$, so ist entweder für $b \geqq 0$ oder für $b \lessgtr 0$ die Funktion $bF(\xi) - aG(\xi)$ isoton. Damit ist aber gewonnen der

Lehrsatz 1. Sind $F(\xi)$ und $G(\xi)$ zwei in (Ξ) isotone Funktionen, so wird durch die Gleichungen

$$x = F(\xi) + a\eta, \qquad y = G(\xi) + b\eta,$$

in denen a und b Konstanten und η einen stetig veränderlichen Parameter bedeuten, eine Kurvenschar dargestellt, die ein gewisses Gebiet der Ebene einfach und lückenlos bedeckt, falls die Konstanten a und b den Ungleichheitsbedingungen genügen, die bewirken, daß

$$bF(\xi) - aG(\xi)$$

in (Ξ) ebenfalls isoton ist.

Aus dem Lehrsatz 1 ergibt sich sofort als Korollar der

Lehrsatz 2. Sind $F(\xi)$ und $G(\xi)$ zwei in (Ξ) isotone und differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen $F'(\xi)$ und $G'(\xi)$ überdies in (Ξ) permanent sind, so wird durch die Gleichungen

$$x = F(\xi) + a\eta, \qquad y = G(\xi) + b\eta,$$

in denen a und b Konstanten und η einen stetig veränderlichen Parameter bedeuten, eine Kurvenschar dargestellt, die ein gewisses Gebiet der Ebene einfach und lückenlos bedeckt, falls die Konstanten a und b den Ungleichheits-

bedingungen genügen, die bewirken, daß

$$bF'(\xi) - aG'(\xi)$$

in (Ξ) *ebenfalls permanent ist.*

Der Lehrsatz 2 ist einer bedeutsamen Verallgemeinerung fähig. Es seien $F(\xi)$ und $G(\xi)$ Funktionen der reellen Veränderlichen ξ, die in (Ξ) isoton und differenzierbar sind und deren Ableitungen überdies in (Ξ) permanent sein sollen, es seien ferner $H(\eta)$ und $K(\eta)$ Funktionen der reellen Veränderlichen η, für die in bezug auf das Intervall

$$\eta' \leq \eta \leq \eta''$$

oder (H) dasselbe gilt. Durch die Gleichungen

$$x = F(\xi) + H(\eta), \quad y = G(\xi) + K(\eta),$$

in denen η als ein in (H) stetig veränderlicher Parameter aufzufassen ist, wird, wenn nur die Funktionen F und G sich nicht beide auf Konstanten reduzieren, wieder eine Kurvenschar dargestellt, die ein gewisses Gebiet der xy-Ebene bedeckt. Alle Kurven der Schar sind der Kurve

$$x = F(\xi) + H(\eta'), \quad y = G(\xi) + K(\eta')$$

kongruent, aus der sie durch eine Reihe von Translationen entstehen. Der Übergang von der zum Parameterwerte η gehörenden Kurve zu der zum Parameterwerte $\eta + \delta\eta$ gehörenden Kurve geschieht durch eine infinitesimale Translation, bei der x und y die Inkremente erhalten:

$$\delta x = H'(\eta)\delta\eta, \quad \delta y = K'(\eta)\delta\eta.$$

Soll die Ebene von den Kurven einfach bedeckt werden, so dürfen je zwei benachbarte Kurven einander nicht schneiden. Dafür ist aber nach Lehrsatz 2 hinreichend, daß der Ausdruck

$$F'(\xi)K'(\eta) - G'(\xi)H'(\eta)$$

in (Ξ) eine permanente Funktion von ξ ist. Mithin gilt der

Lehrsatz 3. Sind $F(\xi)$ *und* $G(\xi)$ *in* (Ξ) *isotone Funktionen mit permanenter Ableitung,* $H(\eta)$ *und* $K(\eta)$ *in* (H) *ebenfalls isotone Funktionen mit permanenter Ableitung, und ist der Ausdruck*

$$D(\xi, \eta) = F'(\xi)K'(\eta) - G'(\xi)H'(\eta)$$

für beliebiges, dem Intervall (H) angehörendes η eine permanente Funktion von ξ, so wird durch die Kurvenschar:

$$x = F(\xi) + H(\eta), \quad y = G(\xi) + K(\eta),$$

wo η einen in (H) stetig veränderlichen Parameter bedeutet, ein Gebiet der xy-Ebene einfach und lückenlos bedeckt.

Die Bedingung, daß die Funktionen F und G sich nicht beide auf Konstanten reduzieren dürfen, konnte in dem Lehrsatz 3 weggelassen werden, da sie vermöge der Bedingung für den Ausdruck D von selbst erfüllt ist.

Bei der Formulierung des Lehrsatzes 3 ist die Veränderliche ξ bevorzugt worden. Man erkennt sofort, daß er richtig bleibt, wenn in ihm ξ und η vertauscht werden. Auf diese Weise ergeben sich zwei Kurvenscharen, die dasselbe Gebiet der Ebene, nämlich das durch die Kurven

$$\begin{cases} x = F(\xi) + H(\eta') \\ y = G(\xi) + K(\eta') \end{cases} \begin{cases} x = F(\xi) + H(\eta'') \\ y = G(\xi) + K(\eta'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = F(\xi') + H(\eta) \\ y = G(\xi') + K(\eta) \end{cases} \begin{cases} x = F(\xi'') + H(\eta) \\ y = G(\xi'') + K(\eta) \end{cases}$$

begrenzte krummlinige Viereck, jedesmal einfach und lückenlos bedecken. Dabei hat jede Kurve der ersten Schar mit jeder Kurve der zweiten Schar einen und nur einen Punkt gemeinsam. Faßt man also beide Kurvenscharen gleichzeitig ins Auge, so ergibt sich der

Lehrsatz 4. Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes 3 und unter der Bedingung, daß der Ausdruck

$$D(\xi, \eta) = F'(\xi)\, K'(\eta) - G'(\xi)\, H'(\eta),$$

wenn ξ und η auf die Intervalle (Ξ) und (H) beschränkt werden, als Funktion von ξ bei beliebigem η, als Funktion von η bei beliebigem ξ immer permanent ist, wird durch die Gleichungen

$$x = F(\xi) + H(\eta), \quad y = G(\xi) + K(\eta)$$

eine Abbildung der $\xi\eta$-Ebene auf die xy-Ebene vermittelt, bei der das Rechteck in der $\xi\eta$-Ebene mit den Seiten:

$$(1.) \qquad \xi = \xi', \quad \xi = \xi'', \quad \eta = \eta', \quad \eta = \eta''$$

ein-eindeutig auf das von den Kurven

$$(2.)\quad \left|\begin{array}{ll} \begin{cases} x=F(\xi')+H(\eta) \\ y=G(\xi')+K(\eta) \end{cases} & \begin{cases} x=F(\xi'')+H(\eta) \\ y=G(\xi'')+K(\eta) \end{cases} \\ \begin{cases} x=F(\xi)+H(\eta') \\ y=G(\xi)+K(\eta') \end{cases} & \begin{cases} x=F(\xi)+H(\eta'') \\ y=G(\xi)+K(\eta'') \end{cases} \end{array}\right.$$

begrenzte Viereck in der xy-Ebene abgebildet wird.

Es möge ausdrücklich hervorgehoben werden, daß es sich mit den Bedingungen des Lehrsatzes 4 sehr wohl verträgt, daß der Ausdruck $D(\xi, \eta)$ in dem Rechteck (1.) in gewissen Kurven, ohne Zeichenwechsel, verschwindet; diese Kurven müssen nur so beschaffen sein, daß sie mit keiner der Geraden $\xi=$ konst. und $\eta=$ konst. ein noch so kleines Stück gemeinsam haben.

Die Tatsache, die in dem Lehrsatze 4 zum Ausdruck kommt, läßt sich auch rein analytisch aussprechen, und man bekommt dann den Lehrsatz:

Lehrsatz 5. Sind $F(\xi)$ und $G(\xi)$ in (Ξ) isotone Funktionen mit permanenter Ableitung, $H(\eta)$ und $K(\eta)$ in (H) ebenfalls isotone Funktionen mit permanenter Ableitung, und ist der Ausdruck

$$D(\xi, \eta) = F'(\xi)\, K'(\eta) - G'(\xi)\, H'(\eta),$$

wenn ξ und η auf die Intervalle (Ξ) und (H) beschränkt werden, als Funktion von ξ bei beliebigem η, als Funktion von η bei beliebigem ξ immer permanent, so ergeben sich vermöge der Gleichungen

$$x = F(\xi) + H(\eta), \quad y = G(\xi) + K(\eta)$$

umgekehrt ξ und η als eindeutige, endliche und stetige Funktionen von x und y, sobald nur die Veränderlichkeit von x und y auf das durch die Gleichungen (2.) definierte Gebiet beschränkt wird.

Es kann sich ereignen, daß die Intervalle (Ξ) und (H) auf alle endlichen Werte von ξ und η erstreckt werden dürfen, ohne daß die Funktionen $F(\xi)$, $G(\xi)$, $H(\eta)$, $K(\eta)$ aufhören, die in den Lehrsätzen 3, 4 und 5 geforderten Eigenschaften zu besitzen. Das Rechteck mit den Seiten (1.) umfaßt dann alle Punkte der $\xi\eta$-Ebene mit endlichen Werten der Koordinaten ξ und η, das heißt, es geht in die $\xi\eta$-Ebene über. Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $F(\xi)$, $G(\xi)$, $H(\eta)$, $K(\eta)$ omnipotent sind, wird das diesem Rechteck in der xy-Ebene entsprechende Gebiet alsdann ebenfalls alle Punkte mit endlichen Werten der Koordinaten x und y

umfassen, das heißt in die xy-Ebene übergehen. Auf diese Weise erhält man den

Lehrsatz 6. Sind $F(\xi)$, $G(\xi)$, $H(\eta)$, $K(\eta)$ für unbeschränkt veränderliche Argumente ξ und η isotone, omnipotente Funktionen mit permanenten Ableitungen und ist der Ausdruck

$$D(\xi,\eta) = F'(\xi)\,K'(\eta) - G'(\xi)\,H'(\eta)$$

als Funktion von ξ bei beliebigem η, als Funktion von η bei beliebigem ξ immer permanent, so ergeben sich aus den Gleichungen

$$x = F(\xi) + H(\eta), \quad y = G(\xi) + K(\eta)$$

umgekehrt ξ und η als eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente x und y. Diese Gleichungen vermitteln daher eine ein-eindeutige Abbildung der xy-Ebene auf die $\xi\eta$-Ebene.

Es ist nicht schwer, die für zwei Veränderliche abgeleiteten Sätze auf beliebig viele Veränderliche zu übertragen; man wird sich dabei zweckmäßig der Sprache der n-dimensionalen Geometrie bedienen. Durch die Gleichungen

$$x_\lambda = F_\lambda(\xi_1) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

wird eine Kurve C in dem Euklidischen Raume R_n von n Dimensionen dargestellt. Die Funktionen $F_\lambda(\xi_1)$ mögen jetzt wieder in einem Intervalle $\xi_1' \leqq \xi_1 \leqq \xi_1''$ oder (Ξ_1) isoton sein, und aus C mögen durch Translationen neue Kurven hervorgehen. Sollen diese einen endlichen Teil des R_n lückenlos bedecken, so muß man ∞^{n-1} Translationen vornehmen und wird daher die n Gleichungen betrachten

$$x_\lambda = F_\lambda(\xi_1) + a_{2\lambda}\xi_2 + a_{3\lambda}\xi_3 + \cdots + a_{n\lambda}\xi_n,$$

in denen die $a_{\varkappa\lambda}$ Konstanten und die $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ stetig veränderliche Parameter bedeuten. Damit jedoch diese Gleichungen wirklich $n-1$ wesentliche Parameter enthalten, muß nach einem bekannten Satze die Matrix

$$\| a_{\varkappa\lambda} \| \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 2, 3, \ldots n \\ \lambda = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

mindestens eine von Null verschiedene Determinante $(n-1)$-ter Ordnung enthalten; diese Forderung läßt sich stets erfüllen, wenn die $a_{\varkappa\lambda}$ nur gewissen Ungleichheitsbedingungen unterworfen werden. Damit das Gebiet des R_n

von den Kurven nur *einfach* bedeckt wird, ist notwendig und hinreichend, daß jede der $(n-1)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten, die durch die Gleichungen

$$x_\lambda = x_\lambda^0 + a_{2\lambda}\,\xi_2 + a_{3\lambda}\,\xi_3 + \cdots + a_{n\lambda}\,\xi_n \qquad (\lambda=1,2,\ldots n)$$

dargestellt werden, die Kurve C nur einmal schneidet. Die Schnittpunkte der durch den Punkt $x_\lambda^0 = F_\lambda(\xi_1^0)$ der Kurve C gehenden Mannigfaltigkeit

$$x_\lambda = F_\lambda(\xi_1^0) + a_{2\lambda}\,\xi_2 + a_{3\lambda}\,\xi_3 + \cdots + a_{n\lambda}\,\xi_n$$

mit dieser Kurve ergeben sich aus den Gleichungen

$$F_\lambda(\xi_1) = F_\lambda(\xi_1^0) + a_{2\lambda}\,\xi_2 + a_{3\lambda}\,\xi_3 + \cdots + a_{n\lambda}\,\xi_n, \qquad (\lambda=1,2,\ldots n)$$

aus denen durch Elimination von $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ folgt:

$$C(\xi_1) = \begin{vmatrix} F_1(\xi_1) & a_{21} & a_{31} \ldots a_{n1} \\ F_2(\xi_1) & a_{22} & a_{32} \ldots a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n(\xi_1) & a_{2n} & a_{3n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1(\xi_1^0) & a_{21} & a_{31} \ldots a_{n1} \\ F_2(\xi_1^0) & a_{22} & a_{32} \ldots a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n(\xi_1^0) & a_{2n} & a_{3n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung ist, wie es sein muß, für $\xi_1 = \xi_1^0$ erfüllt. Sie ist dann und nur dann allein für diesen Wert von ξ_1 erfüllt, wenn die Funktion $C(\xi_1)$ in (Ξ_1) isoton ist. Das läßt sich aber, da die Funktionen $F_\lambda(\xi_1)$ isoton sein sollten, stets durch geeignete Wahl der Konstanten $a_{\varkappa\lambda}$ erreichen, wobei diese wiederum nur Ungleichheitsbedingungen zu genügen haben. Als Ausdehnungen der Lehrsätze 1 und 2 entspringen so die Lehrsätze:

Lehrsatz 7. Sind die Funktionen $F_\lambda(\xi_1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ in (Ξ_1) isoton, so wird durch die n Gleichungen

$$x_\lambda = F_\lambda(\xi_1) + a_{2\lambda}\,\xi_2 + a_{3\lambda}\,\xi_3 + \cdots + a_{n\lambda}\,\xi_n,$$

in denen die $a_{\varkappa\lambda}$ Konstanten, die $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ stetig veränderliche Parameter bedeuten, eine Kurvenschar dargestellt, die ein n-fach ausgedehntes Gebiet des R_n einfach und lückenlos bedeckt, falls die Konstanten $a_{\varkappa\lambda}$ den Ungleichheitsbedingungen genügen, die dazu erforderlich sind, daß mindestens eine Determinante $(n-1)$-ter Ordnung der Matrix

$$\| a_{\varkappa\lambda} \| \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 2, 3, \ldots n \\ \lambda = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

nicht verschwindet und daß der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} F_1(\xi_1) & a_{21} & a_{31} \dots a_{n1} \\ F_2(\xi_1) & a_{22} & a_{32} \dots a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n(\xi_1) & a_{2n} & a_{3n} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine isotone Funktion von ξ_1 *wird.*

Lehrsatz 8. Sind die Funktionen $F_\lambda(\xi_1)$ $(\lambda = 1, 2, \dots n)$ *in* (Ξ_1) *isoton und besitzen sie darin permanente Ableitungen* $F'_\lambda(\xi_1)$, *so wird durch die n Gleichungen*

$$x_\lambda = F_\lambda(\xi_1) + a_{2\lambda}\xi_2 + a_{3\lambda}\xi_3 + \dots + a_{n\lambda}\xi_n,$$

in denen die $a_{\varkappa\lambda}$ *Konstanten und die* $\xi_2, \xi_3, \dots \xi_n$ *stetig veränderliche Parameter bedeuten, eine Kurvenschar dargestellt, die ein n-fach ausgedehntes Gebiet des* R_n *einfach und lückenlos bedeckt, falls die Konstanten* $a_{\varkappa\lambda}$ *den Ungleichheitsbedingungen genügen, die bewirken, daß der Ausdruck*

$$\begin{vmatrix} F'_1(\xi_1) & a_{21} & a_{31} \dots a_{n1} \\ F'_2(\xi_1) & a_{22} & a_{32} \dots a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F'_n(\xi_1) & a_{2n} & a_{3n} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

in (Ξ_1) *eine permanente Funktion von* ξ_1 *ist.*

Betrachtet man weiter die n Gleichungen

$$x_\lambda = F_{1\lambda}(\xi_1) + F_{2\lambda}(\xi_2) + \dots + F_{n\lambda}(\xi_n),$$

in denen die Funktionen $F_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa)$ in den Intervallen $\xi'_\varkappa \leqq \xi_\varkappa \leqq \xi''_\varkappa$ oder $(\Xi_\varkappa)$ isotone Funktionen mit permanenten Ableitungen sein sollen, und faßt die Größen $\xi_2, \xi_3, \dots \xi_n$ als stetig veränderliche Parameter auf, so stellen diese Gleichungen eine Kurvenschar dar, die ein n-fach ausgedehntes Gebiet des R_n lückenlos bedeckt, falls mindestens eine Determinante $(n-1)$-ter Ordnung der Matrix

$$\| F'_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa) \| \qquad \binom{\varkappa = 2, 3, \dots n}{\lambda = 1, 2, \dots n}$$

nicht identisch verschwindet. Das möge der Fall sein. Aus einer der Kurven entstehen die benachbarten durch die infinitesimalen Translationen,

bei denen die x_λ die Inkremente

$$\delta x_\lambda = F'_{2\lambda}(\xi_2)\,\delta\xi_2 + \cdots + F'_{n\lambda}(\xi_n)\,\delta\xi_n$$

erfahren. Die Bedingung, daß benachbarte Kurven einander nicht schneiden, besteht also darin, daß die Determinante

$$D(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = |F'_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa)| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

eine permanente Funktion von ξ_1 ist, wie auch die Parameterwerte $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ in $(\Xi_2), (\Xi_3), \ldots (\Xi_n)$ gewählt werden. Als Analogon zu dem Lehrsatz 3 ergibt sich daher der

Lehrsatz 9. Sind die Funktionen $F_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa)$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$ *in dem Intervalle* $(\Xi_\varkappa)$ *isoton, besitzen sie darin permanente Ableitungen und ist der Ausdruck*

$$D(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = |F'_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa)|, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

wie auch die $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ *in den Intervallen* $(\Xi_2), (\Xi_3), \ldots (\Xi_n)$ *gewählt werden, eine permanente Funktion von* ξ_1, *so wird durch die Kurvenschar*

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} F_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

wo die $\xi_2, \ldots \xi_n$ *in* $(\Xi_2), \ldots (\Xi_n)$ *stetig veränderliche Parameter bedeuten, ein n-fach ausgedehntes Gebiet des* R_n *einfach und lückenlos bedeckt.*

Die auf die Matrix

$$\|F'_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa)\| \qquad \binom{\varkappa = 2, 3, \ldots n}{\lambda = 1, 2, \ldots n}$$

bezügliche Bedingung durfte hier weggelassen werden, da sie vermöge der Bedingung für den Ausdruck $D(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ von selbst erfüllt ist.

Es wird genügen, wenn jetzt die den Lehrsätzen 4, 5 und 6 entsprechenden Lehrsätze einfach angegeben werden. Man hat:

Lehrsatz 10. Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes 9 und unter der Bedingung, daß der Ausdruck $D(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ *als Funktion irgend einer der Größen* $\xi_\varkappa$ *angesehen, wie auch die übrigen Größen* $\xi_1, \ldots \xi_{\varkappa-1}, \xi_{\varkappa+1}, \ldots \xi_n$ *in den Intervallen* $(\Xi_1), \ldots (\Xi_{\varkappa-1}), (\Xi_{\varkappa+1}), \ldots (\Xi_n)$ *gewählt werden, immer in* $(\Xi_\varkappa)$ *permanent ist, wird durch die n Gleichungen*

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} F_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa)$$

Größen $\xi_1, \ldots \xi_{\varkappa-1}, \xi_{\varkappa+1}, \ldots \xi_n$ *gewählt werden, immer permanent für unbeschränkt veränderliches* $\xi_\varkappa$, *so ergeben sich aus den Gleichungen*

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} F_{\varkappa\lambda}(\xi_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

umgekehrt $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *als eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente* $x_1, x_2, \ldots x_n$. *Diese Gleichungen vermitteln daher eine ein-eindeutige Abbildung des Raumes der* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *auf den Raum der* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$.

3.

In der Abhandlung vom Jahre 1866 betrachtet *Weierstraß* ein Problem, das in einer der vorliegenden Untersuchungen angepaßten Bezeichnungsweise so formuliert werden kann. Die Funktionen $\varphi(u)$ und $f(u)$ der reellen Veränderlichen u mögen in dem Intervall

$$a \leq u \leq A$$

folgenden Bedingungen unterliegen:

1. Beide sind darin eindeutig, endlich und stetig.

2. Die Funktion $f(u)$ ist darin beständig positiv und verschwindet niemals.

3. Die Funktion $\varphi(u)$ „ändert ihr Zeichen nicht und wird nicht unendlich, solange u in dem Intervall $a \ldots A$ bleibt".

Wird unter diesen Voraussetzungen

$$(1.) \qquad x = \int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}}$$

gesetzt, so beweist *Weierstraß*, daß umgekehrt u eine eindeutige, endliche und stetige Funktion der unbeschränkt veränderlichen Variablen x ist, die überdies gerade ist und die Periode

$$2\omega = 2\int_a^A \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}}$$

besitzt. Um dies zu beweisen, setzt *Weierstraß*

$$u = \frac{A+a}{2} - \frac{A-a}{2}\cos\xi.$$

Die Gleichung (1.) geht dann über in die Gleichung:

$$x = \int_0^\xi P(\xi)\, d\xi. \tag{2.}$$

Vermöge der Voraussetzungen ist $P(\xi)$ eine eindeutige, endliche und stetige Funktion des unbeschränkt veränderlichen Argumentes ξ, die ihr Zeichen niemals ändert und die Periode 2π besitzt. Jedesmal, wenn ξ um 2π wächst, wird sich daher

$$\int_0^\xi P(\xi)\, d\xi$$

um den Betrag 2ω ändern. Hieraus schließt *Weierstraß*, daß x eine omnipotente Funktion von ξ ist, die sich beständig in demselben Sinne ändert, und daß daher auch umgekehrt ξ eine eindeutige, endliche, stetige, omnipotente Funktion von u wird, die sich beständig in demselben Sinne ändert.

Das ist der Kern des Beweises, denn jetzt folgt sofort, daß u als Funktion von x die behaupteten Eigenschaften besitzt. Damit aber jener Schluß gemacht werden kann, genügt es, die Funktion $P(\xi)$ der Bedingung zu unterwerfen, daß sie in dem Intervall $a \ldots A$ *permanent* sein soll. Sie darf also sehr wohl in einzelnen Punkten des Intervalles verschwinden, aber nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Teilintervalles. Vielleicht hat *Weierstraß* durch die Worte: „ändert ihr Zeichen nicht" ausdrücken wollen, daß ein Verschwinden von $\varphi(u)$ nicht ausgeschlossen sein soll; freilich hätte dann die Beschränkung auf einzelne Punkte hinzugefügt werden müssen. Diese Auffassung findet eine Stütze darin, daß *Weierstraß* erst, als er in § 2 seiner Abhandlung dazu übergeht, die Entwicklung von u in eine trigonometrische Reihe zu untersuchen, ausdrücklich sagt: „Ich nehme an, ... daß $\varphi(u)$ weder Null noch unendlich groß wird. Es wird kaum ein der analytischen Behandlung überhaupt zugänglicher Fall vorkommen, wo dies nicht zutrifft." Für die Entwicklungen des § 2 ist diese Voraussetzung über die Funktion $\varphi(u)$ in der Tat unentbehrlich. Allein schon das einfache Beispiel

$$x = \int_{-1}^{u} \frac{\frac{1}{3} u^2\, du}{\sqrt{1-u^6}}, \quad u = -\sqrt[3]{\cos x},$$

zeigt, daß sie kein unbedingtes Erfordernis für die analytische Behandlung ist. Es würde sich daher wohl lohnen, wenn jemand untersuchen wollte, wie die Methode des § 2 abzuändern ist, damit bei einfachen Annahmen über das Verschwinden von $\varphi(u)$ die Bestimmung der Koeffizienten der trigonometrischen Reihe für u durchgeführt werden kann.

Soviel über den Fall einer Veränderlichen. Bei zwei Veränderlichen handelt es sich um das Umkehrproblem:

$$(3.)\quad \begin{cases} x = \int\limits_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int\limits_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}}, \\ y = \int\limits_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)g(u)}} + \int\limits_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)k(v)}}. \end{cases}$$

Man wird von vornherein festsetzen, daß die darin vorkommenden Funktionen $\varphi(u), \chi(u), f(u), g(u); \psi(v), \omega(v), h(v), k(v)$ in dem durch die Ungleichheiten

$$a \leq u \leq A, \qquad b \leq v \leq B$$

erklärten Gebiete $\mathfrak{G}_2$ sämtlich eindeutig, endlich und stetig sein sollen, ferner daß $f(u), g(u); h(v), k(v)$ darin beständig positiv sind und niemals verschwinden. Setzt man wieder

$$u = \frac{A+a}{2} - \frac{A-a}{2}\cos\xi,$$

$$v = \frac{B+b}{2} - \frac{B-b}{2}\cos\eta,$$

so mögen die Gleichungen (3.) übergehen in die Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} x = F(\xi) + H(\eta), \\ y = G(\xi) + K(\eta). \end{cases}$$

Vermöge der Voraussetzungen sind hierin die Funktionen $F(\xi)$, $G(\xi)$; $H(\eta)$, $K(\eta)$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente ξ und η, deren Ableitungen alle die Periode 2π besitzen. Jedesmal, wenn ξ um 2π wächst, werden sich daher $F(\xi)$ und $G(\xi)$ bezw. um

$$2\,\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)\,f(u)}}$$

und

$$2\,\omega_{12} = 2\int_a^A \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)\,g(u)}}$$

ändern, ebenso, wenn η um 2π wächst, $H(\eta)$ und $K(\eta)$ bezw. um

$$2\,\omega_{21} = 2\int_b^B \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)\,h(v)}}$$

und

$$2\,\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)\,k(v)}}.$$

Diese Funktionen sind mithin, sobald nur die Größen $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}$ von Null verschieden ausfallen, *omnipotente* Funktionen ihres Argumentes. Damit sie auch *isotone* Funktionen werden, wie es der Lehrsatz 6 des vorhergehenden Abschnittes fordert, müssen ihre Ableitungen *permanente* Funktionen sein, das bedeutet aber, es müssen die Funktionen $\varphi(u), \chi(u); \psi(v), \omega(v)$ in $\mathfrak{G}_2$ permanent sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}$ sicher von Null verschieden, und es ergeben sich dann nach Lehrsatz 6, sobald nur der Ausdruck

$$D(\xi, \eta) = F'(\xi)\,K'(\eta) - G'(\xi)\,H'(\eta)$$

als Funktion von ξ bei beliebigem η, als Funktion von η bei beliebigem ξ immer permanent ist, das heißt aber, sobald der Ausdruck

$$\varphi(u)\,\omega(v) - \chi(u)\,\psi(v)$$

in $\mathfrak{G}_2$ als Funktion von u bei beliebigem v, als Funktion von v bei beliebigem u permanent ist, es ergeben sich, sage ich, umgekehrt ξ und η als eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente x und y, und folglich werden auch u und v ebensolche Funktionen von x und y. Daß diese Funktionen überdies gerade sind und die beiden Periodenpaare $2\omega_{11}$, $2\omega_{12}$ und $2\omega_{21}$, $2\omega_{22}$ besitzen, ist jetzt sofort klar. Damit ist aber das Theorem IV für den Fall von zwei Veränderlichen bewiesen.

Es möge noch auf einen Unterschied des soeben vorgetragenen Beweises gegenüber dem Beweise von Herrn *Staude* aufmerksam gemacht werden. Bei der Herleitung des Lehrsatzes 6, der ja den Kern jenes Beweises bildet, wurden die Kurven $\xi = \text{const.}$ und $\eta = \text{const.}$ in der xy-Ebene betrachtet. Herr *Staude* untersucht umgekehrt bei seinem Beweise in den Math. Annalen die Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ in der $\xi\eta$-Ebene. Einige Bemerkungen über die Kurven $\xi = \text{const.}$ und $\eta = \text{const.}$ finden sich allerdings in der Abhandlung, die er in diesem Journale veröffentlicht hat; sie haben, wie ich gern hervorhebe, für mich den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen gebildet.

Auf den Beweis des Theorems IV für n Veränderliche ausführlicher einzugehen, möchte ich mir ersparen; es genüge zu sagen, daß es mit Hilfe des Lehrsatzes 12 genau ebenso bewiesen wird, wie das bei zwei Veränderlichen mittels des Lehrsatzes 6 geschehen ist.

Band 128. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätstraße 54.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

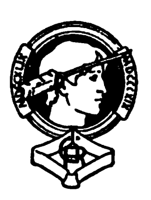
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 128.

Heft IV.

Ausgegeben den 31. März.



Berlin,

W. 35, Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1905.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Über die Bildung abstrakter Gruppen aus zwei Elementen.

Von Herrn *E. Netto* in Gießen.

§ 1.

Eine Übersicht über abstrakte Gruppen, von denen im folgenden allein die Rede sein soll, wenn nichts anderes angegeben wird, erlangt man vollständig und am einfachsten durch die Aufstellung ihres *Cayley*schen quadratischen Schemas. Will man aber umgekehrt versuchen, durch Aufstellung eines solchen zu einer Gruppe zu gelangen, so stößt man auf Schwierigkeiten, die sich nur in den einfachsten Fällen überwinden lassen. Es kann also die Frage aufgeworfen werden, ob die Konstitution von Gruppen nicht auf einem anderen Wege erreicht werden kann.

Dazu scheint derjenige besonders geeignet, der von einzelnen, und zwar möglichst wenigen Elementen ausgeht, und die für sie und zwischen ihnen vorhandenen Relationen angibt, aus denen die Gruppe konstruiert werden kann. Ist z. B. nur ein Element a und seine Ordnung n gegeben, so wird durch

$$a^n = 1$$

unter der Beifügung, daß keine niedrigere Potenz von a gleich 1 wird, stets eine zyklische Gruppe bestimmt. Ihr *Cayley*sches Schema ist bekannt.

§ 2.

Es fragt sich, ob sich diese Methode über den Fall eines einzigen konstituierenden Elementes ausdehnen läßt. Hier wäre in eine Untersuchung der endlichen Gruppen einzutreten, welche aus zwei Elementen a und b gebildet werden können.

Zunächst müssen beide Elemente selbst von endlicher Ordnung sein. Wir bezeichnen die Ordnung von a mit α_0, die von b mit β_0 und setzen also

$$(1.)\qquad a^{\alpha_0}=1,\ b^{\beta_0}=1,\ (\text{min}).$$

Dabei sollen Gleichungen wie (1.) die niedrigsten Werte der Exponenten auf der linken Seite angeben, wenn die Bezeichnung (min) angefügt ist. Nach (1.) ist die α_0-te Potenz von a gleich einer Potenz von b, nämlich gleich der β_0-ten. Möglicherweise wird schon eine niedrigere Potenz von a gleich einer Potenz von b; es sei a^α die niedrigste dieser Eigenschaft. Dann werden alle und nur

$$(2.)\qquad a^\alpha,\ a^{2\alpha},\ a^{3\alpha},\ a^{4\alpha},\dots a^{\varkappa\alpha},\dots$$

zu Potenzen von b; demnach ist

$$(3.)\qquad \alpha_0=k\alpha\,.$$

Ebenso sei b^β die niedrigste Potenz von b, welche gleich einer Potenz von a wird; dann kann man setzen

$$(3^{\text{a}}.)\qquad \beta_0=l\beta$$

und hat

$$(1^{\text{a}}.)\qquad a^{k\alpha}=1,\ b^{l\beta}=1,\ (\text{min}).$$

Ferner ist, da die β-te Potenz von b zu den Potenzen von a gehört und diese Potenz von a also unter (2.) vorkommt,

$$b^\beta=a^{m\alpha};$$

da das Entsprechende für a^α gilt, so ist

$$(4.)\qquad a^\alpha=b^{n\beta}b;\ {}^\beta=a^{m\alpha}.$$

Aus (4.) geht für jedes ganzzahlige ϱ hervor

$$a^{\alpha\varrho}=b^{n\beta\varrho}=a^{mn\alpha\varrho},$$

$$\alpha\varrho(mn-1)\equiv 0\ (\text{mod}\ k\alpha),$$

und also

$$(5.)\qquad mn\equiv 1\ (\text{mod}\ k);\ mn\equiv 1\ (\text{mod}\ l).$$

Ferner ergibt sich aus (1^a.) und (4.)

$$a^{l\alpha}=b^{nk\beta}=1;\ b^{l\beta}=a^{lm\alpha}=1;$$

$$nk \equiv 0 \pmod{l};\quad ml \equiv 0 \pmod{k};$$
$$mnk \equiv k \equiv 0 \pmod{l};\quad mnl \equiv l \equiv 0 \pmod{k};$$

d. h. k ist durch l und l ist durch k teilbar, und folglich wird $k = l$. Demnach haben wir

$$(1^b.)\qquad \begin{cases} a^{k\alpha} = 1; \quad b^{k\beta} = 1, \text{ (min)}; \\ a^{\alpha} = b^{n\beta}; \quad b^{\beta} = a^{m\alpha}, \text{ (min)}; \\ \quad mn \equiv 1 \pmod{k}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen s und t mit (s, t), dann können wir $(1^b.)$ ersetzen durch

$$(1^c.)\qquad \begin{cases} a^{k\alpha} = 1, \text{ (min)}; \\ b^{\beta} = a^{m\alpha}; \; (k, m) = 1, \text{ (min)}. \end{cases}$$

Denn es folgt aus $(1^c.)$ sofort, daß $b^{k\beta}$ die niedrigste Potenz von b ist, die gleich einer Potenz von a wird,

$$b^{k\beta} = 1 \text{ (min)};$$

und bestimmt man n durch die Kongruenz in $(1^b.)$, dann folgt

$$b^{n\beta} = a^{mn\alpha} = a^{(gk+1)\alpha} = a^{\alpha}.$$

§ 3.

Die Gleichungen $(1^b.)$ § 2 reichen nicht aus, um eine endliche Gruppe zu charakterisieren, falls nicht etwa β oder α gleich 1 wird, ein Fall, der auf zyklische Gruppen zurückführt. Denn wenn α und β größer als 1 sind, kämen ohne weitere Bedingungen in der Gruppe als Elemente

$$ab,\; aba,\; abab,\; ababa, \ldots$$

vor, die sich dann nicht reduzieren ließen.

Die Beziehungen, die zu $(1^c.)$, § 2 hinzugenommen werden können, um eine endliche Gruppe zu charakterisieren, dürfen sehr verschiedene Formen annehmen. Wir wollen einige naheliegende Fälle untersuchen.

Eine sehr einfache Beziehung, durch welche das Ziel erreicht wird, ist

$$(1.)\qquad ba = a^{x} b$$

oder auch

$$(1^a.) \qquad ba = ab^{\varkappa}.$$

Nun geht durch die Bezeichnung

$$b^{-1} = a_1, \quad a^{-1} = b_1$$

(1ᵃ.) in

$$b_1 a_1 = a_1^{\varkappa} b_1$$

über; wir können uns also auf die Betrachtung von (1.) beschränken. In (1.) kann $\varkappa$ nicht willkürlich gewählt werden. Dies zeigt sich folgendermaßen. Aus (1.) folgt durch Iteration

$$(2.) \qquad b^h a^g = a^{g\varkappa^h} b^h.$$

Setzen wir hierin $h = \beta$, so geht nach (1ᵇ.) § 2 die Potenz von b in eine solche von a über und ist folglich mit den Potenzen von a vertauschbar.

Daraus folgt, indem man b^β weghebt, für jedes g

$$a^g = a^{g\varkappa^\beta},$$

und insbesondere für $g = 1$

$$(3.) \qquad \varkappa^\beta \equiv 1 \pmod{k\alpha}.$$

Nur wenn (3.) *für* (1.) *erfüllt ist, kann eine Gruppe* $\{a, b\}$ *bestehen.* Die in (1ᵇ.) § 2 aufgestellten Bedingungen lassen sich hier vereinfachen. So folgt aus $b^\beta = a^{m\alpha}$ die Gleichung $b^{k\beta} = 1$, (min), da m zu k prim ist; aus derselben Gleichung $b^\beta = a^{m\alpha}$ folgt auch, wenn man n durch $mn \equiv 1 \pmod{k}$ bestimmt, $a^\alpha = b^{n\beta}$. Man kann also die Bedingungen folgendermaßen formulieren:

$$(4.) \qquad \begin{cases} a^{k\alpha} = 1, \ b^\beta = a^{m\alpha}, \text{(min)}, \ (m, k) = 1; \\ ba = a^{\varkappa} b; \ \varkappa^\beta \equiv 1 \pmod{k\alpha}. \end{cases}$$

Da jedes Element der Gruppe in die Form

$$(5.) \qquad a^s b^t \qquad {\scriptstyle (s = 1, 2, 3, \ldots k\alpha;\ t = 0, 1, 2, \ldots \beta - 1)}$$

gebracht werden kann, und da weiter die Gleichung

$$a^s b^t = a^{s_1} b^{t_1}$$

nur bei $s = s_1$, $t = t_1$ möglich ist, wird die Ordnung der Gruppe gleich $k \cdot \alpha\beta$.

Die Existenz der Gruppe ist freilich noch nicht festgestellt. Dazu gehört noch der Nachweis, daß bei der Komposition der Elemente das

folgt

$$2^u(2^{t-u}-1)=(2^t-1)-(2^u-1)\equiv 0 \pmod{\alpha},$$

so ergibt sich, daß alle β, welche (2.) befriedigen, Vielfache von β sind.

Ferner weist man leicht nach, daß

$$(4.)\qquad 2^{\alpha^\mu\beta_0}\equiv 1 \pmod{\alpha^{\mu+1}},\ (\min)$$

ist, d. h. erstens daß die hingeschriebene Kongruenz befriedigt ist, und zweitens, daß sie für keinen Exponenten befriedigt wird, der kleiner ist als $\alpha^\mu\beta_0$. Der Beweis folgt aus

$$2^{\alpha^\mu\beta_0}-1=\left(2^{\alpha^{\mu-1}\beta_0(\alpha-1)}+2^{\alpha^{\mu-1}\beta_0(\alpha-2)}+\cdots+2^{\alpha^{\mu-1}\beta_0}+1\right)\left(2^{\alpha^{\mu-1}\beta_0}-1\right),$$

indem die erste Klammer der rechten Seite nach (3.) gerade durch α und die zweite gerade durch α^μ teilbar ist.

Wir untersuchen nun die Ordnung eines Elementes der Gruppe $\{a, b\}$. Dieses läßt sich stets auf die Form $a^g b^h$ bringen; die Ordnung dieses Elementes ist σ, wenn σ die niedrigste Zahl ist, die als Exponent genommen, die Einheit hervorbringt. Vermöge der dritten Gleichung (1.) erhält man

$$(5.)\qquad (a^g b^h)^\sigma = a^{\frac{2^{\sigma h}-1}{2^h-1}g}\, b^{\sigma h}.$$

Soll dies gleich 1 werden, so muß, wenn wir den banalen Fall $g\equiv 0 \pmod{\alpha}$ ausscheiden,

$$(6.)\qquad \begin{cases} \sigma h\equiv 0 \pmod{\beta},\\ \dfrac{2^{\sigma h}-1}{2^h-1}\equiv 0 \pmod{\alpha}\end{cases}$$

erfüllt sein. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle, je nachdem (2^h-1) durch α teilbar ist, oder nicht.

Im ersten Falle sei α^μ die höchste Potenz, die in (2^h-1) als Faktor vorkommt,

$$2^h-1\equiv 0 \pmod{\alpha^\mu};\qquad (\mu>0)$$

damit dann die zweite Kongruenz aus (6.) erfüllt ist, muß

$$2^{\sigma h}-1\equiv 0 \pmod{\alpha^{\mu+1}}$$

werden. Aus (4.) folgt, daß

$$h=\alpha^{\mu-1}\beta_0\tau_0,\quad \sigma h=\alpha^\mu\beta_0\tau_1,$$

$$\sigma=\alpha\frac{\tau_1}{\tau_0}$$

ist. Da τ_0 wegen (4.) prim zu α ist, so wird σ ein Vielfaches von α,

$$\sigma = \alpha\tau \qquad (\tau = 1, 2, 3, \ldots)$$

und die erste Kongruenz aus (6.) liefert

$$\tau = \frac{\beta\tau'}{(\alpha h, \beta)}, \qquad (\tau' = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\sigma = \frac{\alpha\beta\tau'}{(\alpha h, \beta)}.$$

Das Minimum von σ erhalten wir für $\tau' = 1$; also wird die Ordnung von $a^g b^h$ gleich

$$\sigma = \frac{\alpha\beta}{(\alpha h, \beta)}.$$

Ist zweitens $(2^h - 1)$ nicht durch α teilbar, dann ist h kein Vielfaches von β_0, wohl aber σh, also auch σ ein Vielfaches von β_0,

$$\sigma = \beta_0\sigma'. \qquad (\sigma' = 1, 2, 3, \ldots)$$

Hier liefert die erste Kongruenz in (6.)

$$\sigma' = \frac{\beta\sigma''}{(\beta_0 h, \beta)}, \qquad (\sigma'' = 1, 2, 3, \ldots)$$

sodaß also die Ordnung des Elementes $a^g b^h$ durch $\sigma'' = 1$ gleich

$$\sigma = \frac{\beta_0 \cdot \beta}{(\beta_0 h, \beta)}$$

wird. Da β_0 ein Teiler von β ist, so hat der Nenner mindestens den Wert β_0, und daher ist σ gleich β oder ein Teiler von β.

Gesetzt, es wäre β_0 ein eigentlicher Teiler von β, dann ist in $\{a, b\}$

$$b^h a^g = a^{2^h g} b^h$$

und für $g = 1$, $h = \beta_0$ wegen (3.)

$$b^{\beta_0} a = a b^{\beta_0}.$$

Die eigentliche Untergruppe $\{a, b^{\beta_0}\}$ *von* $\{a, b\}$ *ist eine Abelsche Gruppe von der Ordnung* $\alpha\beta : (\beta_0, \beta)$. *Diese Untergruppe ist in* $\{a, b\}$ *ausgezeichnet enthalten.* Man hat nämlich

$$a^g b^h (a^\varkappa b^{\lambda\beta_0}) b^{-h} a^{-g} = a^{g_1} b^h b^{\lambda\beta_0} b^{-h} a^{-g} = a^{g_2} b^{\lambda\beta_0};$$

und damit ist die letzte Behauptung bewiesen.

Bei der allgemeinen Gruppe (4.) in § 3 kann man ähnliche Schlüsse machen, sobald die Kongruenz (3.), § 3

$$x^\beta \equiv 1 \qquad (\text{mod } k\alpha)$$

auch noch für einen niedrigeren Exponenten β_0, als β es ist, befriedigt werden kann. In diesem Falle erhält man genau das obige Resultat wieder.

§ 5.

Nahmen wir bei der Konstruktion der Gruppe $\{a, b\}$ außer der Festsetzung, daß a und b von endlicher Ordnung sein sollen, noch

$$ba = a^x b$$

an, so stand es von vornherein fest, daß $\{a, b\}$, wenn sie widerspruchsfrei besteht, von endlicher Ordnung sein wird, da ja jedes Element auf die Form

$$a^g b^k$$

gebracht werden kann. Bei der allgemeinen Beziehung

$$(1.) \qquad ba = a^x b^\lambda$$

ist das nicht selbstverständlich, da z. B. nicht ohne weiteres aus den Annahmen die Endlichkeit der Ordnung von $\{ab\}$ folgt. Schon hieraus ist ersichtlich, daß die Untersuchung sich schwieriger gestaltet. Dazu kommt noch, daß die Wahl der Ordnungen von a und von b bei gegebener Gleichung (1.) Beschränkungen unterworfen ist, die nicht immer leicht ersichtlich sind. Es sei z. B.

$$(2.) \qquad a^\alpha = 1, \quad b^\beta = 1, \quad ba = a^x b^{\beta-1},$$

dann folgt hieraus

$$bab = a^x b^{\beta-1} b = a^x,$$

$$abab = baba = a^{x+1},$$

$$aba = a^{x+1} b^{\beta-1}; \; aba = b^{\beta-1} a^{x+1},$$

$$a^{x+1} b^{\beta-1} = b^{\beta-1} a^{x+1},$$

und daraus einfach weiter

$$a^{x+1} b^{2(\beta-1)} = a^{x+1} b^{\beta-1} \cdot b^{\beta-1} = b^{\beta-1} a^{x+1} b^{\beta-1} = b^{2(\beta-1)} a^{x+1},$$

$$a^{x+1} b^{\lambda(\beta-1)} = b^{\lambda(\beta-1)} a^{x+1},$$

und für passende Wahl von λ

$$a^{\varkappa+1}\, b = b\, a^{\varkappa+1}. \tag{3.}$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$a^{\varrho(\varkappa+1)}\, b = b\, a^{\varrho(\varkappa+1)}. \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \dots) \tag{4.}$$

Wenn also $(\varkappa + 1, \alpha) = 1$ ist, dann kann man ϱ so wählen, daß

$$a\, b = b\, a \tag{5.}$$

wird. Demnach hätte man

$$b\, a = a^{\varkappa}\, b^{\beta-1} = a\, b; \quad a^{\varkappa-1} \cdot b^{\beta-2} = 1,$$
$$b^2 = a^{\varkappa-1}.$$

Ist nun β eine ungerade Zahl, dann wird

$$b\, a = a^{\varkappa}\, b^{\beta-1} = a^{\varkappa_1},$$

was auszuschließen ist, da sonst b unter den Potenzen von a vorkäme; ist β eine gerade Zahl, dann wird

$$b\, a = a^{\varkappa}\, b^{\beta-1} = a^{\varkappa_1}\, b,$$

und so kämen wir auf den Fall des früheren Paragraphen zurück. Neue Gruppen (2.) erhält man also überhaupt nur dann, wenn $\varkappa + 1$ und α einen gemeinsamen Teiler haben.

Ganz ähnliche Schlüsse können wir an die konstituierenden Gleichungen

$$a^{\alpha} = 1, \quad b^{\beta} = 1; \quad b\, a = a^{\alpha-1}\, b^{\lambda}$$

knüpfen.

§ 6.

Wir wenden uns zu dem einfachsten zu (1.), § 5 gehörigen Fall

$$a^{\alpha} = 1, \quad b^{\beta} = 1; \quad b\, a = a^2\, b^2. \tag{1.}$$

Unter alleiniger Benutzung der dritten Gleichung (1.) finden wir

$$b\, a^2 = b\, a \cdot a = a^2\, b^2\, a = a^2\, b \cdot b\, a = a^2\, b \cdot a^2\, b^2 = a^2\, (b\, a^2)\, b^2.$$

Das ergibt

$$b\, a^2 = a^2\, (b\, a^2)\, b^2 = a^4\, (b\, a^2)\, b^4 = \cdots = a^{2\mu}\, (b\, a^2)\, b^{2\mu}. \tag{2.}$$

Ist jetzt $b^{2\mu} = 1$, dann kann man in

$$b\, a^2 = a^{2\mu} \cdot b\, a^2$$

ba^2 wegheben und findet $a^{2\mu}=1$. Ist umgekehrt in (2.) $a^{2\nu}=1$, dann folgt ebenso, daß $b^{2\nu}=1$ wird. Gesetzt nun, α wäre gerade, so nehmen wir $2\nu=\alpha$ und haben $b^{\alpha}=1$, d. h. α ist ein Vielfaches von β. Ist auch β gerade, so würde β ein Vielfaches von α sein. Daher muß $\alpha=\beta$ werden. — Ist bei geradem α der Exponent β ungerade, so muß α ein Vielfaches von β, und 2β ein Vielfaches von α sein; also wird $\alpha=2\beta$. — So erkennt man, daß nur die folgenden vier Fälle auf Gruppen $\{a, b\}$ führen können:

$$(3.)\quad \begin{cases} \text{I)}\ a^{2m}=1, & b^{2m}=1; \quad ba=a^2b^2, \\ \text{II)}\ a^{4m+2}=1, & b^{2m+1}=1; \quad ba=a^2b^2, \\ \text{III)}\ a^{2m+1}=1, & b^{4m+2}=1; \quad ba=a^2b^2, \\ \text{IV)}\ a^{2m+1}=1, & b^{2m+1}=1; \quad ba=a^2b^2. \end{cases}$$

Stellt man die abstrakte Gruppe als Substitutionengruppe dar, dann folgt:

Besteht zwischen zwei Substitutionen s und t die Beziehung

$$ts=s^2t^2,$$

dann sind beide von gleicher Ordnung, oder die Ordnung der einen Substitution ist das Doppelte der Ordnung der anderen.

Die Verwendung derselben Methode liefert noch weitere Resultate. So ist

$$\begin{aligned} b^2a^3 &= b\cdot ba\cdot a^2 = b\cdot a^2b^2\cdot a^2 = ba\cdot ab\cdot ba\cdot a = a^2b^2\cdot ab\cdot a^2b^2a \\ &= a^2b^2a\cdot ba\cdot ab^2a = a^2b^2a^3b^2ab^2a = a^2(b^2a^3)(b^2a)^2 \end{aligned}$$

also

$$(4.)\quad \begin{cases} b^2a^3 = a^2(b^2a^3)(b^2a)^2 = a^4(b^2a^3)(b^2a)^4 = \cdots \\ = a^{2\mu}(b^2a^3)(b^2a)^{2\mu}. \end{cases}$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} bab^2a &= a^2b^2\cdot b^2a = a^2b^3\cdot ba = a^2b^3a^2b^2 = a^2b^2\cdot ba\cdot ab^2 \\ &= a^2b^2a^2b^2ab^2 = a^2b\cdot ba\cdot ab^2ab^2 = a^2ba^2b^2ab^2ab^2 \\ &= (a^2b)^2(bab^2a)b^2, \end{aligned}$$

also

$$(5.)\qquad bab^2a = (a^2b)^{2\mu}(bab^2a)b^{2\mu}.$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned} baba &= a^2b^2a^2b^2 = a^2b\cdot ba\cdot ab^2 = a^2b\cdot a^2b^2\cdot ab^2 = a^2\cdot ba\cdot ab\cdot ba\cdot b^2 \\ &= a^4b^2aba^2b^4 = a^4b\,(baba)\,ab^4, \end{aligned}$$

also

$$(6.)\qquad baba = (a^4 b)^\mu (baba)(ab^4)^\mu .$$

Aus (4.), (5.), (6.) lassen sich ähnlich wie aus (2.) Schlüsse ziehen. So liefert z. B. (6.): *Besteht zwischen zwei Substitutionen s und t die Beziehung*

$$ts = s^2 t^2,$$

dann sind

$$s^4 t \quad \text{und} \quad s t^4$$

von derselben Ordnung.

§ 7.

Wir können dieselbe Methode auch für Gruppen verwenden, bei denen allgemeiner

$$(1.)\qquad a^\alpha = 1, \quad b^\beta = 1, \quad ba = a^\varkappa b^\lambda$$

gegeben ist. Mit Hilfe der dritten Gleichung (1.) allein kann man bilden

$$b^2 a^\varrho = b \cdot a^\varkappa b^\lambda \cdot a^{\varrho-1} = a^\varkappa b^\lambda \cdot a^{\varkappa-1} b^\lambda a^{\varrho-1} = (a^\varkappa b^{\lambda-2})(b^2 a^\varrho)(a^{\varkappa-\varrho-1} b^\lambda a^{\varrho-1})$$
$$= (a^\varkappa b^{\lambda-2})^\mu (b^2 a^\varrho)(a^{\varkappa-\varrho-1} b^\lambda a^{\varrho-1})^\mu ,$$

und ebenso

$$b^\varrho a^2 = b^{\varrho-1} \cdot a^\varkappa b^\lambda a = b^{\varrho-1} a^\varkappa b^{\lambda-1} a^\varkappa b^\lambda = (b^{\varrho-1} a^\varkappa b^{\lambda-\varrho-1})(b^\varrho a^2)(a^{\varkappa-2} b^\lambda)$$
$$= (b^{\varrho-1} a^\varkappa b^{\lambda-\varrho-1})^\mu (b^\varrho a^2)(a^{\varkappa-2} b^\lambda)^\mu .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ersieht man, *daß alle Elemente*

$$a^\varkappa b^{\lambda-2},\ a^{\varkappa-\varrho-1} b^\lambda a^{\varrho-1} \quad \text{und ebenso} \quad a^{\varkappa-2} b^\lambda,\ b^{\varrho-1} a^\varkappa b^{\lambda-\varrho-1} \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$$

von gleicher Ordnung sind: insbesondere haben

$$a^\varkappa b^{\lambda-2}, \quad a^{\varkappa-2} b^\lambda \quad \text{und ebenso} \quad b^\lambda a^{\varkappa-2}, \quad b^{\lambda-2} a^\varkappa$$

dieselbe Ordnung, falls $ba = a^\varkappa b^\lambda$ *ist.*

In dieselbe Gedankenreihe gehört auch die folgende Betrachtung, die von den Beziehungen zwischen a und b unabhängig ist. Man hat

$$(ab)^{\varrho+1} = a(ba)^\varrho b;$$

nehmen wir nun für ϱ die Ordnung von (ba), falls sie endlich ist, dann entsteht

$$(ab)^{\varrho+1} = ab, \quad (ab)^\varrho = 1,$$

d. h. die Ordnung von (ab) ist ein Teiler der Ordnung von (ba). Nehmen wir dagegen für ϱ die Ordnung von (ab), so folgt

$$a(ba)^\varrho b = ab, \quad (ba)^\varrho = 1,$$

d. h. die Ordnung von (ba) ist ein Teiler der Ordnung von (ab). *Folglich haben (ab) und (ba) gleiche Ordnung.*

§ 8.

Nach den Darlegungen des § 6 kann eine Gruppe $\{a, b\}$ mit

$$(1.) \qquad a^\alpha = 1, \quad b^\beta = 1, \quad ba = a^2 b^2$$

nur bestehen, wenn entweder α und β einander gleich sind, oder wenn die größere der beiden Zahlen das Doppelte der kleineren ist.

Wir wollen zunächst die beiden Möglichkeiten $\alpha = \beta = 4$ und $\alpha = \beta = 5$ behandeln, da diese auf frühere Fälle zurückführen.

Es sei also

$$(2.) \qquad a^4 = 1, \quad b^4 = 1, \quad ba = a^2 b^2.$$

Geht man in der letzten dieser drei Gleichungen zu den reziproken Elementen über, so entsteht weiter

$$(3.) \qquad b^2 a^2 = a^3 b^3$$

Mit Hilfe von (2.) und (3.) wird

$$ab = a^2 \cdot a^3 b^3 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2 a^2 \cdot b^2 = a^2 b^2 \cdot a^2 b^2 = baba,$$

$$(4.) \qquad (ba)^2 = ab,$$

$$(ba)^6 = (ab)^3 = a \cdot (ba)^2 \cdot b = a \cdot ab \cdot b = a^2 b^2 = ba,$$

$$(5.) \qquad (ba)^5 = 1,$$

$$(6.) \qquad b(ba)^2 = b \cdot ab = (ba)b.$$

Setzen wir jetzt

$$(7.) \qquad b = a_1, \quad ba = b_1,$$

also

$$(7^a.) \qquad a_1 = b, \quad a_1^3 b_1 = a,$$

so gilt für a_1 und b_1 nach (2.), (5.) und (6.)

$$(8.) \qquad a_1^4 = 1, \quad b_1^5 = 1, \quad b_1 a_1 = a_1 b_1^2.$$

Die aus a_1, b_1 gebildete Gruppe ist wegen (7.) und (7^a.) identisch

mit der aus a und b gebildeten. (8.) zeigt demnach, daß $\{a, b\}$ mit (2.) besteht, die Ordnung 20 besitzt und daß alle Elemente in der Form

$$a_1^\sigma b_1^\tau \qquad (\sigma=1,2,3,4;\ \tau=1,2,3,4,5)$$

darstellbar sind.

Ähnliche Schlüsse gelten für

$$(9.)\qquad a^5=1,\quad b^5=1;\quad ba=a^2b^2;$$

die letzte dieser drei Gleichungen liefert

$$(10.)\qquad b^3a^3=a^4b^4,$$

und man erhält

$$ab=a^2\cdot a^4b^4\cdot b^2=a^2b^3a^3b^2=a^2b^2\cdot ba\cdot a^2b^2=ba\cdot ba\cdot ba,$$

$$(11.)\qquad (ba)^3=ab,$$

$$(ba)^{12}=(ab)^4=a(ba)^3b=a\cdot ab\cdot b=a^2b^2=ba,$$

$$(12.)\qquad (ba)^{11}=1,$$

$$(13.)\qquad b(ba)^3=b\cdot ab=ba\cdot b.$$

Setzen wir

$$(14.)\qquad b=a_1,\quad ba=b_1,$$

also

$$(14^a.)\qquad a_1=b,\quad a_1^4b_1=a,$$

so folgt

$$\{a, b\}=\{a_1, b_1\}$$

und für $\{a_1, b_1\}$ gilt

$$(15.)\qquad a_1^5=1,\quad b_1^{11}=1;\quad b_1a_1=a_1b_1^3.$$

Die Gruppe ist also von der Ordnung $5\cdot 11=55$. Ihre Elemente sind wieder in der Form

$$a_1^\sigma b_1^\tau \qquad (\sigma=1,2,3,4,5;\ \tau=1,2,\dots 11)$$

darstellbar.

§ 9.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn wir zu

$$(1.)\qquad a^3=1,\quad b^3=1;\quad ba=a^2b^2$$

und zu

$$(2.)\qquad a^3=1,\quad b^6=1;\quad ba=a^2b^2$$

übergehen.

Wir ziehen aus

$$a^3 = 1, \quad ba = a^2 b^2$$

eine Reihe von Schlüssen, die dann gemeinsam für (1.) und für (2.) gelten. Die Beweise der Relationen sind, soweit sie nicht sofort erkennbar werden, angedeutet.

$$(3.) \quad \begin{cases} (\alpha)\ a^3 = 1; \quad (\beta)\ a^2 b^2 = ba: \quad (\gamma)\ aba = b^2; \\ (\delta)\ aba \cdot b = b \cdot aba = b^3; \quad (\varepsilon)\ b^2 a^2 = aba \cdot a^2 = ab; \\ (\zeta)\ ab^3 = ab \cdot b^2 = b^2 a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot a^2 b^2 = b^3 a; \\ (\eta)\ b^2 a b^2 = b^2 a^2 \cdot a^2 b^2 = ab \cdot ba = ab^2 a; \\ (\vartheta)\ ab^5 = ab^3 \cdot b^2 = b^3 a b^2 = b \cdot b^2 a b^2 = bab^2 a. \end{cases}$$

Zu diesen Relationen nehmen wir, um (1.) zu behandeln, noch hinzu

$$(3^a.) \quad \begin{cases} (\iota)\ b^3 = 1; \quad (\varkappa)\ bab = a^2; \\ (\lambda)\ ba^2 b = a \cdot a^2 b^2 \cdot b^2 a^2 \cdot b = a \cdot ba \cdot ab \cdot b = ab \cdot a^2 b^2 = ab \cdot ba = ab^2 a. \end{cases}$$

Um nun die Elemente von (1.) zu bilden, gehen wir so vor: Wir schreiben zuerst die Einheit, als Element nullter Dimension, hin; darunter setzen wir die Elemente erster Dimension a und b als zweite Zeile. Die dritte Zeile entsteht, indem wir die Elemente der zweiten Zeile links zuerst mit a und dann mit b komponieren, usw. Jede folgende Zeile entsteht, indem wir die vorhergehende zuerst links mit a und dann links mit b komponieren. Zu gleicher Zeit lassen wir aber eine Vereinfachung dadurch eintreten, daß wir alle Elemente, die sich durch (3.) und (3ª.) auf frühere zurückführen lassen, von den weiteren Kompositionen ausschließen. Diesen Fall deuten wir dadurch an, daß die reduzierende Formel (α), (β), ... $(\varkappa)$, (λ) hinter das Element geschrieben wird. So entsteht die Elemententabelle

$1;$

$a;\ b;$

$a^2;\ ab;\ ba;\ b^2;$

$a^3(\alpha);\ a^2b;\ aba(\gamma);\ ab^2;\ ba^2;\ bab(\varkappa);\ b^2a;\ b^3(\iota);$

$a^3b(\alpha);\ a^2b^2(\beta);\ aba^2(\gamma);\ ab^2a;\ ba^2b(\lambda);\ bab^2(\varkappa);\ b^2a^2(\varepsilon),\ b^3a(\iota);$

$a^2b^2a(\beta);\ bab^2a(\varkappa).$

Hier bricht die Reihe von selbst ab. Die Tabelle liefert demgemäß für die Gruppe (1.) die folgenden zwölf Elemente:

sein würde. Ebenso folgt aus Tabelle III, daß 31, und aus Tabelle IV, daß 41 sich nicht ändert. Aus III entnehmen wir weiter, daß 42 nur mit 13 vertauscht werden dürfte; und da 42 auch nur mit 33 in Verbindung stehen kann, muß 42, 33, 13 ungeändert bleiben usw. Also gibt es nur die Substitution 1, welche das Element 11 nicht umstellt. Da $\{s, t\}$ transitiv ist, so ist also die Gruppe $\{s, t\}$ regulär *und* $\{a, b\}$ *besteht widerspruchsfrei.* **Ihre Elemente lassen sich nicht sämtlich in der Form $a^{\varkappa} b^{\lambda}$ herstellen. Setzt man dagegen**

$$ab = u, \quad ba = v,$$

so werden die Elemente der Gruppe durch

$$a^{\alpha} u^{\beta} v^{\gamma}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2;\ \gamma = 1, 2)$$

geliefert; dabei ist a von der Ordnung 3; u und v sind beide von der Ordnung 2.

Wir gehen nun zu

$$(2.) \qquad a^3 = 1, \ b^6 = 1; \quad ba = a^2 b^2$$

über. Die Relationen (3.) bleiben hier bestehen; aber zu ihnen nehmen wir noch die zweite Gleichung aus (2.) hinzu und bilden dann wieder wie oben eine Tabelle der Elemente. Diese nimmt jetzt die Form an:

$1;$

$a;\ b;$

$a^2;\ ab;\ ba;\ b^2;$

$a^3(\alpha);\ a^2 b;\ aba(\gamma);\ ab^2;\ ba^2;\ bab;\ b^2 a;\ b^3;$

$a^3 b(\alpha);\ a^2 b^2(\beta);\ aba^2(\gamma);\ abab(\delta);\ ab^2 a;\ ab^3;\ ba^2 b;$
$\qquad bab^2;\ b^2 a^2(\varepsilon);\ b^2 ab;\ b^3 a(\zeta);\ b^4;$

$a^2 b^2 a(\beta);\ a^2 b^3(\beta);\ aba^2 b(\gamma);\ abab^2(\gamma);\ ab^2 ab;\ ab^4;\ bab^2 a;$
$\qquad bab^3;\ b^2 a^2 b(\varepsilon);\ b^2 ab^2(\eta);\ b^3 ab(\zeta);\ b^5;$

$a^2 b^2 ab(\beta);\ a^2 b^4(\beta);\ abab^2 a(\delta);\ abab^3(\delta);\ ab^5(\vartheta);\ bab^2 ab(\vartheta);$
$\qquad bab^4(\beta);\ b^2 ab^2 a(\eta);\ b^2 ab^3(\eta);\ b^6 = 1.$

Die weiteren Bildungen liefern demnach nichts Neues; die Tabelle schließt sich hier von selbst. Wir sind zu 24 Elementen gekommen, nämlich zu

$$(5.) \quad \begin{cases} 1,\ a,\ b,\ a^2,\ ab,\ ba,\ b^2,\ a^2 b,\ ab^2,\ ba^2,\ bab,\ b^2 a,\ b^3,\ ab^2 a, \\ ab^3,\ ba^2 b,\ bab^2,\ b^2 ab,\ b^4,\ ab^2 ab,\ ab^4,\ bab^2 a,\ bab^3,\ b^5 \end{cases}$$

Nun wäre noch zu zeigen, daß unter der Annahme von (1.) die Elemente (5.) eine Gruppe bilden. Zu diesem Zwecke gehen wir von $\{a, b\}$ wieder zu der, aus dem *Cayley*schen Schema gebildeten Substitutionengruppe über. Den Zeilen mit den Anfangsgliedern (5.) entsprechen dann die Substitutionen

$$(6.)\quad \begin{cases} 1,\ s,\ t,\ s^2,\ st,\ ts,\ t^2,\ s^2t,\ st^2,\ ts^2,\ tst,\ t^2s,\ t^3,\ st^2s, \\ st^3,\ ts^2t,\ tst^2,\ t^2st,\ t^4,\ st^2st,\ st^4,\ tst^2s,\ tst^3,\ t^5, \end{cases} \qquad (s^3=1,\ t^6=1)$$

wobei sich findet

$$(7.)\quad \begin{cases} s=(1\ a\ a^2)(b\ ab\ a^2b)(b^2\ ab^2\ ba)(b^3\ ab^3\ bab)(b^4\ ab^4\ bab^2) \\ \qquad (b^5\ bab^2a\ bab^3)(ba^2\ b^2a\ ab^2a)(ba^2b\ b^2ab\ ab^2ab), \\ t=(1\ b\ b^2\ b^3\ b^4\ b^5)(a\ ba\ b^2a\ ab^3\ bab^3\ ab^2ab)(ab\ bab\ b^2ab\ ab^4\ a^2\ ba^2) \\ \qquad (a^2b\ ba^2b\ ab^2\ bab^2\ ab^2a\ bab^2a). \end{cases}$$

Es wäre zu zeigen, daß $\{s, t\}$ regulär ist, d. h. daß jede Substitution (6.) die eins der Elemente nicht enthält, sich auf die Einheit reduzieren muß. Ließe nun z. B. st ein Element ungeändert, so würden $st\cdot t^5$ und t^5, d. h. s und t^5, dieses Element in gleicher Weise umsetzen. Das ist nicht möglich, denn wir sehen, daß nie zwei Elemente desselben Zyklus von s in einem Zyklus von t auftreten; also kann st kein Element ungeändert lassen. In gleicher Weise können wir für alle Substitutionen (6.) den Nachweis führen, außer für st^2st und tst^2s. Die zweite Substitution ist

$$ts\cdot t^2s = s^2t^2\cdot t^2s = st^4s;$$

in der umgewandelten Form gestattet sie denselben Beweisgang; die erste Substitution liefert wegen (ε) die Umgestaltung des Elementes

$$st^2st = st\cdot t^2s^2 = st^3s^2,$$

und in der letzten Gestalt kann sie demselben Beweise unterworfen werden. $\{s, t\}$ ist also regulär, *und die Gruppe $\{a, b\}$ besteht widerspruchsfrei.*

Die bisherigen Darlegungen waren dazu bestimmt, in das Problem der Gruppenbildung aus zwei Elementen einzudringen. Die nächste Fragestellung möchte die sein: *Unter welchen Umständen liefern zwei Elemente a und b bei*

$$a^\alpha = 1;\quad b^\beta = 1;\quad ba = a^\varkappa b^\lambda$$

eine widerspruchsfreie endliche Gruppe? **Daß tatsächlich, (bei $\varkappa = \lambda = 2$) Beschränkungen eintreten, ist oben gezeigt worden. Das allgemeine Problem scheint mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft zu sein; schon für $\varkappa = \lambda = 3$ werden die Verhältnisse verwickelt.**

§ 10.

Um dies zu zeigen, wollen wir nachweisen, daß die durch zwei Elemente a und b gebildete Gruppe, zwischen denen die Beziehungen bestehen

$$(1.) \qquad a^4 = 1, \quad b^4 = 1; \quad ba = a^3 b^3,$$

eine widerspruchsfreie Gruppe von unendlich hoher Ordnung wird.

Wir stellen zunächst eine geometrische, zu (1.) einstufig isomorphe Gruppe her. Zu dem Zwecke nehmen wir in der Ebene der x, y zwei Punkte O und Q an. Dem Elemente a in (1.) ordnen wir diejenige Operation zu, welche jeden willkürlichen Punkt P der Ebene auf dem um O mit OP geschlagenen Kreise um einen Quadranten in positivem Drehungssinne weiterführt. Bei dieser Festsetzung ist die erste Bedingung aus (1.), nämlich $a^4 = 1$, erfüllt. Dem Elemente b ordnen wir die Operation zu, welche P in gleicher Weise auf dem um Q mit QP geschlagenen Kreise um $\frac{1}{4}\pi$ in positivem Drehungssinne verschiebt; dabei wird $b^4 = 1$ gewahrt. Daß auch $ba = a^3 b^3$ ist, erkennt man geometrisch auf das leichteste. Es ist auch folgender Beweis sehr einfach. Wir nehmen OQ zur x-Achse, O zum Anfangspunkt und Q zum Einheitspunkt; dem Punkt P geben wir die Koordinaten x und y:

$$P = (x, y).$$

Dann wird, wenn P_a die Einwirkung von a auf P bedeutet usw.

$$(2.) \quad \begin{cases} P_a = \left| x, y \quad -y, x \right|, \quad P_{a^2} = \left| x, y \quad -x, -y \right|. \\ \qquad\qquad P_{a^3} = \left| x, y \quad y, -x \right|, \quad P_{a^4} = \left| x, y \quad x, y \right|, \\ P_b = \left| x, y \quad 1-y, x-1 \right|, \quad P_{b^2} = \left| x, y \quad 2-x, -y \right|, \\ \qquad\qquad P_{b^3} = \left| x, y \quad 1+y, 1-x \right|, \quad P_{b^4} = \left| x, y \quad x, y \right|; \end{cases}$$

$$(3.) \qquad \begin{cases} P_{ba} = \left| x, y \quad 1-x, 1-y \right|, \\ P_{a^3 b^3} = \left| x, y \quad 1-x, 1-y \right|. \end{cases}$$

Aus dieser Zusammenstellung erkennt man also gleichfalls, daß die geometrische Gruppe zu (1.) einstufig isomorph ist. Wir können daher das P unterdrücken und einfach

$$(4.)\qquad a = |x, y \quad -y, x|, \quad b = |x, y \quad 1-y, x-1|$$

schreiben. Hieraus erhält man u. a.

$$(5.)\qquad (a^2 b^2)^\nu = |x, y \quad 2\nu + x, y|, \quad (a b^3)^\nu = |x, y \quad \nu + x, \nu + y|;$$

und daraus ist zu ersehen, daß die Ordnung der Elemente $a^2 b^2$ und $a b^3$ unendlich groß wird, da ja ν beliebig hoch angenommen werden kann.

Zeichnet sich die gegebene geometrische Deutung durch Anschaulichkeit aus, so erhält man durch Benutzung von komplexen Variablen besonders einfache Darstellungen. Wir setzen $x + iy = z$ und haben

$$(6.)\qquad a = |z \quad iz|, \quad b = |z \quad iz + 1 - i|.$$

Hieraus ersieht man, daß jedes Element

$$(7.)\qquad a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots \qquad (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \cdots = h)$$

die Form

$$|z \quad i^h \cdot z + \mathrm{cst}|$$

besitzt. Dies zeigt, daß eine ausgezeichnete Untergruppe entsteht, wenn man alle Elemente mit

$$h \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2),$$

und eine andere, wenn man alle Elemente mit

$$h \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 4)$$

zusammenfaßt. Die erste dieser beiden Gruppen heiße H, die zweite K. Die Dimension des Elementes (7.) soll durch die Zahl h bestimmt werden. Dann enthält H alle Elemente von (1.) mit gerader Dimension, K alle diejenigen, deren Dimension durch 4 teilbar ist. K ist auch eine ausgezeichnete Untergruppe von H.

Die einfachsten Elemente von K haben die Dimension 4; es sind

$$(8.)\qquad \begin{cases} a^3 b = |z \quad z+1|, & b^3 a = |z \quad z-1|; \\ a b^3 = |z \quad z+i|, & b a^3 = |z \quad z-i|; \\ a^2 b^2 = |z \quad z+1+i|, & b^2 a^2 = |z \quad z-1-i|; \\ b a^2 b = |z \quad z+1-i|, & a b^2 a = |z \quad z-1+i|. \end{cases}$$

Die beiden in je einer Zeile stehenden Elemente sind zu einander reziprok.

Durch strenge Induktion kann man leicht nachweisen, daß in K alle und nur die Elemente

$$|z \quad z \pm m \pm ni|$$

als Komplex der Elemente von der Dimension $h=4\eta$ auftreten, bei denen sicher eine und mindestens eine der Koordinaten $\pm m$ und $\pm n$ den Wert $\eta = \frac{1}{4} h$, keine von beiden aber einen absolut höheren Wert hat. So besitzt K die Elemente (8.) als Komplex der Elemente von der Dimension 4; und ferner als Komplex der Dimension 8 die folgenden, bei denen nur $\pm m \pm ni$ angegeben ist,

$$\begin{array}{rrr}
0+2i, & 1+2i, & 2+0i, \\
0-2i, & 1-2i, & -2+0i, \\
 & -1+2i, & 2+1i, \\
 & -1-2i, & -2+1i, \\
 & & 2-1i, \\
 & & -2-1i, \\
 & & 2+2i, \\
 & & -2+2i, \\
 & & 2-2i, \\
 & & -2-2i.
\end{array}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Anzahl der Elemente der Dimension $h=4\eta$ in K, also auch in (1.), gleich $2h=8\eta$ ist.

Ebenso gilt der Satz: *Die Gruppe* (1.) *hat* $2h$ *Elemente* (7.) *von der Dimension* h. Der Beweis ist mit größerer Mühe verknüpft.

Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen.

Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.

Die Untersuchungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, die ich im Anschlusse an das *Riemann*sche Fragment*) seit einer Reihe von Jahren**) verfolge, haben mich zu der Einsicht geführt, daß die Mehrzahl der in dieser Theorie auftretenden substitutionen- und gruppentheoretischen Fragen in viel eleganterer und tiefergehender Weise behandelt werden kann, wenn man dieselben statt an eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung an ein System von n homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung anknüpft. Es ist jedoch nicht dieser Gesichtspunkt allein, der mich veranlaßt, hier auf die in den letzten Jahrzehnten so vielfach und in so erschöpfender Weise***) behandelte Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen zurückzukommen; einen anderen Anlaß hierfür bietet die Frage nach der Existenz der Lösungen solcher Systeme dar.

Man hat seit dem Erscheinen der klassischen Arbeiten von *Fuchs* die Existenz der Lösungen linearer Differentialgleichungen, für den Fall einer komplexen unabhängigen Variablen fast ausschließlich dadurch bewiesen, daß man, sei es in der Umgebung regulärer Stellen, sei es in der Umgebung solcher singulären Stellen, wo die Integrale nicht unbestimmt werden, Reihenentwicklungen, die nach Potenzen des Inkrementes fortschreiten, aufstellte,

*) Werke (1892), S. 377—390.

**) Von 1895 ab, wo ich in Übungen an der Berliner Universität das *Riemann*sche Fragment behandelt habe.

***) Man sehe die einschlägigen Arbeiten der Herren *Sauvage*, *Koenigsberger*, *Grünfeld*, *Horn* u. a.

deren Konvergenz dann mit Hilfe des *calcul des limites* oder anderer mehr direkter Methoden zu erhärten war. Dieses dem Gedankenkreise der *Cauchy-Weierstraß*schen Funktionentheorie angehörige Verfahren erscheint in der weiteren Entwicklung der Theorie, die ja — wie schon *Fuchs* in seiner ersten Arbeit betont — wesentlich im Sinne der von *Riemann* in seiner Inauguraldissertation aufgestellten Prinzipien erfolgt, als fremdartiges Element, und zwar namentlich darum, weil dieses Verfahren die Art und Weise nicht erkennen läßt, wie sich die den linearen Differentialgleichungen genügenden monogenen Integralfunktionen aus ihren realen und imaginären Teilen zusammensetzen. Es ist daher wohl nicht überflüssig, eine Methode für jene Existenzbeweise darzulegen, die sich auf die Anwendung des *Cauchy-Lipschitz*schen*) Verfahrens für den Fall einer realen unabhängigen Veränderlichen stützt, um dann, schrittweise dem von *Riemann* für die Definition des Integrals einer monogenen Funktion einer komplexen Variabeln angegebenen Wege folgend, zu dem Falle einer komplexen unabhängigen Variabeln aufzusteigen. Soweit es sich um den Fall realer Variabeln handelt, deckt sich diese Methode mit derjenigen, die Herr *Volterra* in der ersten seiner beiden schönen Abhandlungen**) für das von ihm sogenannte „integrale destro di una sostituzione" auseinandersetzt, und ich möchte gleich hier mit Dank der Anregung gedenken, die ich auch sonst aus diesen — wie es scheint diesseits der Alpen wenig bekannten — Abhandlungen geschöpft habe, obwohl ich mir weder den Ausgangspunkt, noch die Bezeichnungen des genannten Autors zu eigen machen konnte.

I.

Es mögen in dem homogenen linearen Differentialsysteme

$$(A.) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}(x)\, y_\lambda \qquad (\varkappa=1,2,\ldots n)$$

die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ Funktionen der realen Variabeln x bedeuten, die in dem

*) *Cauchy*, Exercices d'Analyse I (1840), S. 328 ff.; *Lipschitz*, Bulletin des Sc. mathém., Bd. 10 (1876) S. 149, Lehrbuch der Analysis II (1880), S. 504.

**) Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, Memorie della Società Ital. delle Scienze (detta dei XL) t. VI (1887), t. XII (1899), vergl. auch Atti della R. Accademia dei Lincei (4.) vol. III (1887), S. 393 und Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo t. II (1888), S. 69.

von p bis r reichenden Intervalle der realen Achse, die Grenzen eingeschlossen, eindeutig und endlich sind, und es sei

$$(y_{i\varkappa}^{(0)}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

eine beliebig vorgeschriebene konstante Matrix (d. h. eine Matrix, deren n^2 Elemente Konstanten sind) von nicht verschwindender Determinante. Wir teilen — wie es namentlich seit *Riemann**) bei der Definition des bestimmten Integrals zwischen realen Grenzen üblich ist — das Intervall von p bis q $(q < r)$ durch die Punkte

$$x_0 = p, \; x_1, \dots x_{m-1}; \; x_m = q$$

in m Teile und nehmen in jedem Teilintervalle $(x_{\nu-1} \dots x_\nu)$ einen beliebigen Zwischenwert $\xi_{\nu-1}$ an. Die Differenzengleichungen

$$y_{i\varkappa}^{(\nu)} - y_{i\varkappa}^{(\nu-1)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}^{(\nu-1)} a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1}) \qquad \underset{(i, \varkappa = 1, 2, \dots n)}{} \qquad (\nu = 1, 2, \dots m)$$

definieren dann eine Folge von Matrizen

$$(y_{i\varkappa}^{(\nu)}), \qquad (\nu = 1, 2, \dots m)$$

die wir auch in der Form

$$(1.) \qquad (y_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (y_{i\varkappa}^{(\nu-1)}) \left(a_{i\varkappa}(\xi_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) + \delta_{i\varkappa}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \dots m)$$

darstellen können, wo $\delta_{i\varkappa}$ das *Kronecker*sche Symbol,**) also

$$(\delta_{i\varkappa}) = 1$$

die *Einheitsmatrix* bedeutet. Durch Komposition der Gleichungen (1.) für $\nu = 1, 2, \dots m$ folgt dann

$$(y_{i\varkappa}^{(m)}) = (y_{i\varkappa}^{(0)}) \prod_{\nu = 1, 2, \dots m} \left(a_{i\varkappa}(\xi_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) + \delta_{i\varkappa}\right),$$

wo die durch das Zeichen Π angedeutete Komposition in der durch die Zahlenreihe $1, 2, \dots m$ gegebenen Reihenfolge vorzunehmen ist.

Wir bemerken, daß der Umstand, daß sich aus den Gleichungen (1.) die den Teilpunkten $x_1, \dots x_{m-1}$ entsprechenden Matrizen $(y_{i\varkappa}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \dots m-1)$ so eliminieren lassen, daß eine direkte Beziehung zwischen $(y_{i\varkappa}^{(m)})$ und $(y_{i\varkappa}^{(0)})$ resultiert, dem spezifischen Charakter des Differentialsystems (A.) zu danken

*) 1867 (1854), Werke (1892), S. 239.

**) $\delta_{i\varkappa} = 0$ für $i \neq \varkappa$, $\delta_{\varkappa\varkappa} = 1$.

ist; in diesem Umstande offenbart sich auch die *ganze* Eigenart der linearen Differentialsysteme, die denselben eine so ausgezeichnete Stellung unter den allgemeinen Differentialsystemen sichert.

Man beweist nun nach Herrn *Volterra*,*) daß die Elemente der Matrix $(y_{i\varkappa}^{(m)})$ sich mit ins Unendliche wachsendem m wohlbestimmten Grenzwerten

$$\lim_m y_{i\varkappa}^{(m)} = \bar{y}_{i\varkappa}$$

nähern, die unabhängig sind von der Wahl der Teilpunkte und von der Wahl der Zwischenwerte, wenn der Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{m} D_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

wo D_ν die größte Schwankung der Elemente der Matrix $(a_{i\varkappa})$ in dem Intervalle $(x_{\nu-1} \dots x_\nu)$ bedeutet, sich mit wachsendem m der Grenze Null nähert. Diese Bedingung ist z. B. allemal erfüllt, wenn die $a_{i\varkappa}$ in dem Intervalle $(p \dots r)$ im *Cauchy*schen Sinne stetig sind. Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = \lim_m (y_{i\varkappa}^{(m)}) = (y_{i\varkappa}^{(0)}) \widehat{\int_p^q} (a_{i\varkappa}\, dx + \delta_{i\varkappa})$$

und kürzer

$$\widehat{\int_p^q} (a_{i\varkappa}\, dx + \delta_{i\varkappa}) = \prod_p^q (a_{i\varkappa});^{**)} \tag{2.}$$

durch dieses Zeichen (2.) wird also eine Matrix dargestellt, die sich für $q = p$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, und man zeigt nun (vergl. *Volterra* a. a. O.), daß wenn man q variabel, also etwa gleich x, nimmt, die Elemente jeder Zeile der Matrix

$$\prod_p^x (a_{i\varkappa})$$

ein Funktionssystem liefern, welches für $y_1, \dots y_n$ gesetzt das Differentialsystem (A.) befriedigt. Die Matrix

$$(y_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa}^{(0)}) \prod_p^x (a_{i\varkappa})$$

*) Memorie etc. t. VI, p. 34 ff.; einen anderen Beweis gebe ich in einem der nächsten Hefte dieses Journals.

**) Herrn *Volterras* „integrale destro“.

stellt folglich dasjenige *Fundamentalsystem* von Integralen des Differentialsystems (A.) dar, welches für $x=p$ die Anfangswerte $(y_{i\varkappa}^{(0)})$ annimmt, also, wenn wir unter $y_{i\varkappa}^{(0)}$ n^2 willkürliche Konstanten verstehen, das allgemeinste Fundamentalsystem, oder, wie wir sagen wollen, die allgemeinste *Integralmatrix* von (A.). Offenbar ist eine Integralmatrix durch Angabe ihrer Anfangswerte eindeutig bestimmt.

Aus den identischen Gleichungen

$$(3.)\qquad \frac{dy_{i\varkappa}}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}a_{\lambda\varkappa}\qquad (i,\varkappa=1,2,\dots n)$$

folgt

$$(a_{i\varkappa})=(y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right);$$

wir setzen

$$(4.)\qquad (a_{i\varkappa})=\mathrm{D}_x(y_{i\varkappa})\,^{*})$$

und bemerken, daß das den beiden Operationssymbolen (2.) und (4.)**) gemeinsame Infinitesimalelement durch die infinitesimale Matrix

$$(5.)\qquad (a_{i\varkappa}\,dx+\delta_{i\varkappa})=(y_{i\varkappa})^{-1}(y_{i\varkappa}+dy_{i\varkappa})$$

gegeben wird. Für diese Operationssymbole gelten nun die folgenden leicht zu verifizierenden Rechnungsregeln.***)

Bedeutet $(\alpha_{i\varkappa})$ eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante, so ist:

$$(\mathrm{I.})\qquad \mathrm{D}_x(\alpha_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})=\mathrm{D}_x(y_{i\varkappa}),$$

$$(\mathrm{II.})\qquad \mathrm{D}_x(\alpha_{i\varkappa})\quad =0,$$

wo durch 0 diejenige Matrix bezeichnet wird, deren sämtliche Elemente verschwinden. Bedeutet $(p_{i\varkappa})$ eine beliebige Matrix, deren Elemente differentiierbare Funktionen von x und deren Determinante nicht identisch Null ist, so gilt

$$(\mathrm{III.})\qquad \mathrm{D}_x(y_{i\varkappa})(p_{i\varkappa})=(p_{i\varkappa})^{-1}\,\mathrm{D}_x(y_{i\varkappa})(p_{i\varkappa})+\mathrm{D}_x(p_{i\varkappa}),$$

wo die Addition der Matrizen in üblicher Weise†) zu verstehen ist; für die

---

*) Herrn *Volterras* „derivata a destra" a. a. O. S. 92.

**) Die sich für $n=1$ auf den Numerus des Integrals beziehungsweise die Derivierte des Logarithmus reduzieren (es ist nützlich, diesen Fall als Paradigma vor Augen zu behalten).

***) Vergl. *Volterra* a. a. O. S. 21, 25, 34, 45, 46, 48, 49, 98.

†) Für das formale Rechnen mit Matrizen vergl. man *Frobenius*, dieses Journal, Bd. 84, S. 1 ff.

konstante Matrix (α_{ik}) ist also insbesondere

$$\text{(III}^a.) \qquad \mathrm{D}_x(y_{ik})(\alpha_{ik}) = (\alpha_{ik})^{-1}\,\mathrm{D}_x(y_{ik})(\alpha_{ik}).$$

Bezeichnen wir ferner mit $Y_{\varkappa\lambda}$ die zum Elemente $y_{\varkappa\lambda}$ gehörige Subdeterminante von

$$D = |y_{i\varkappa}|, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

durch die Determinante D dividiert, sodaß also

$$(y_{i\varkappa})^{-1} = (Y_{i\varkappa}),$$

so haben wir

$$\text{(6.)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} y_{\nu\lambda} Y_{\varkappa\nu} = \delta_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n)$$

also differentiiert

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_{\nu\lambda} \frac{dY_{\varkappa\nu}}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dy_{\nu\lambda}}{dx} Y_{\varkappa\nu} = 0,$$

und folglich nach (3.)

$$\sum_{\nu}\sum_{\varrho} a_{\varrho\lambda} y_{\nu\varrho} Y_{\varkappa\nu} = -\sum_{\nu} \frac{dY_{\varkappa\nu}}{dx} y_{\nu\lambda},$$

woraus sich mit Rücksicht auf (6.)

$$a_{\varkappa\lambda} = -\sum_{\nu} \frac{dY_{\varkappa\nu}}{dx} y_{\nu\lambda},$$

also

$$-\left(\frac{dY_{i\varkappa}}{dx}\right) = (a_{i\varkappa})(Y_{i\varkappa})$$

und weiter die oft nützliche Formel

$$\text{(IV.)} \qquad \mathrm{D}_x(y_{i\varkappa})^{-1} = -(y_{i\varkappa})\,\mathrm{D}_x(y_{i\varkappa})\,(y_{i\varkappa})^{-1}$$

ergibt. — Des weiteren haben wir

$$\text{(V.)} \qquad \mathrm{D}_x \int_p^x (a_{i\varkappa}) = \quad (a_{i\varkappa}),$$

$$\text{(VI.)} \qquad \int_q^p (a_{i\varkappa}) = \left(\int_p^q (a_{i\varkappa})\right)^{-1},$$

$$\text{(VII.)} \qquad \int_p^q (a_{i\varkappa}) = \int_p^s (a_{i\varkappa}) \cdot \int_s^q (a_{i\varkappa}), \qquad (p < s < r)$$

$$\text{(VIII.)} \qquad \int_p^q (a_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})_p^{-1}(y_{i\varkappa})_q,$$

wo der einer Matrix als unterer Index angehängte Buchstabe andeuten soll, daß jene Matrix für den durch jenen Buchstaben bezeichneten Wert von x zu nehmen ist. Ferner ist, wenn $(b_{i\varkappa})$ eine Matrix mit nicht identisch verschwindender Determinante bedeutet,

$$\text{(IX.)}\qquad \prod_p^x (b_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})^{-1} = (b_{i\varkappa})_p \cdot \prod_p^x [(a_{i\varkappa}) + \mathrm{D}_x(b_{i\varkappa})] \cdot (b_{i\varkappa})^{-1},$$

also für die konstante Matrix $(\alpha_{i\varkappa})$

$$\text{(IX}^a\text{.)}\qquad \prod_p^x (\alpha_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa})^{-1} = (\alpha_{i\varkappa}) \cdot \prod_p^x (a_{i\varkappa}) \cdot (\alpha_{i\varkappa})^{-1}.$$

Endlich gilt der wichtige Satz, daß aus

$$\text{(X.)}\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_x(y_{i\varkappa}) = \mathrm{D}_x(z_{i\varkappa}) \\ \quad (z_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa})(y_{i\varkappa}) \end{cases}$$

folgt, wo $(\alpha_{i\varkappa})$ eine konstante Matrix bedeutet.

II.

Um nun zu dem Falle einer komplexen Variabeln $x = \xi + \eta\sqrt{-1}$ aufzusteigen, betrachten wir ein System von Differentialgleichungen der Form

$$\text{(B.)}\qquad du_\varkappa = d\xi \sum_{\lambda=1}^{m} \alpha_{\lambda\varkappa}(\xi,\eta)\, u_\lambda + d\eta \sum_{\lambda=1}^{m} \beta_{\lambda\varkappa}(\xi,\eta)\, u_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots m)$$

wo wir der Einfachheit wegen voraussetzen wollen, daß die $\alpha_{i\varkappa}, \beta_{i\varkappa}$ innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches S der (ξ, η)-Ebene eindeutige endliche und differentiierbare Funktionen der realen Variabeln ξ, η bedeuten.

Soll das System (B.) unbeschränkt integrabel sein, so muß*) eine Matrix $(u_{i\varkappa})$ existieren, für welche

$$\mathrm{D}_\xi(u_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}), \quad \mathrm{D}_\eta(u_{i\varkappa}) = (\beta_{i\varkappa}), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots m)$$

also

$$\text{(1.)}\qquad \left(\frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \xi}\right) = (u_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa}), \quad \left(\frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \eta}\right) = (u_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa})$$

ist. Differentiiert man die erste der Gleichungen (1.) nach η, die zweite

*) Vergl. *Sauvage*, Annales de l'École Normale (1882), t. XI, S. 33—78; *Horn*, Habilitationsschrift (1890), Mathem. Annalen, Bd. 42 (1893), S. 216; *Volterra* a. a. O. S. 105.

nach ξ, so kommt

$$\left(\frac{\partial^2 u_{i\varkappa}}{\partial\eta\partial\xi}\right)=(u_{i\varkappa})\left(\frac{\partial\alpha_{i\varkappa}}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial\eta}\right)(\alpha_{i\varkappa}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_{i\varkappa}}{\partial\xi\partial\eta}\right)=(u_{i\varkappa})\left(\frac{\partial\beta_{i\varkappa}}{\partial\xi}\right)+\left(\frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial\xi}\right)(\beta_{i\varkappa})$$

und durch Vergleichen dieser beiden Matrizen

$$\text{(C.)}\qquad \left(\frac{\partial\alpha_{i\varkappa}}{\partial\eta}\right)+(\beta_{\varkappa i})(\alpha_{i\varkappa})=\left(\frac{\partial\beta_{i\varkappa}}{\partial\xi}\right)+(\alpha_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa}),$$

was die bekannten *Integrabilitätsbedingungen* für das Differentialsystem (B.) liefert.

Sind diese Bedingungen erfüllt und bedeuten (ξ_0, η_0), (ξ, η) zwei beliebige Punkte innerhalb S, für welche die rechtwinklig gebrochene Linie von (ξ_0, η_0) über (ξ_0, η) nach (ξ, η) hin ganz innerhalb S liegt, so befriedigt die Matrix

$$\text{(2.)}\qquad (v_{i\varkappa})=\widehat{\int_{\eta_0}^{\eta}}(\beta_{i\varkappa}(\xi_0,\eta)d\eta+\delta_{i\varkappa})\cdot\widehat{\int_{\xi_0}^{\xi}}(\alpha_{i\varkappa}(\xi,\eta)d\xi+\delta_{i\varkappa})$$

die Gleichungen

$$\text{(3.)}\qquad \begin{cases} D_\xi(v_{i\varkappa})=(\alpha_{i\varkappa}), \quad D_\eta(v_{i\varkappa})=(\beta_{i\varkappa}), \\ \lim\limits_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}}(v_{i\varkappa})=(\delta_{i\varkappa}). \end{cases}$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen sind ohne weiteres evident, zum Beweise der zweiten kann man*) wie folgt verfahren. — Setzt man für einen Augenblick

$$\text{(4.)}\qquad (w_{i\varkappa})=\widehat{\int_{\xi_0}^{\xi}}(\alpha_{i\varkappa}(\xi,\eta)\,d\xi+\delta_{i\varkappa}),$$

so ergibt die Anwendung der Regel (III.) zunächst

$$\text{(5.)}\qquad D_\eta(v_{i\varkappa})=(w_{i\varkappa})^{-1}(\beta_{i\varkappa}(\xi_0,\eta))(w_{i\varkappa})+D_\eta(w_{i\varkappa}).$$

Zufolge der Integrabilitätsbedingung (C.) sind aber die partiellen Derivierten nach ξ der sämtlichen Elemente der Matrix

$$\text{(6.)}\qquad (w_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa}(\xi,\eta)-D_\eta(w_{i\varkappa}))(w_{i\varkappa})^{-1}$$

gleich Null, die Matrix (6.) folglich von ξ unabhängig, wir können also, um die Matrix (6.) zu berechnen, für ξ den Wert ξ_0 einsetzen.

*) Vergl. *Volterra* a. a. O. S. 72, 102.

Nun ist aber nach (4.)

$$\lim_{\xi=\xi_0} (w_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa}),$$

also

$$\lim_{\xi=\xi_0} \mathrm{D}_\eta (w_{i\varkappa}) = 0,$$

die Matrix (6.) ergibt sich folglich gleich $(\beta_{i\varkappa}(\xi_0, \eta))$. Setzen wir aber an die Stelle der letzteren Matrix in (5.) den Ausdruck (6.) ein, so erhalten wir sofort die zweite der Gleichungen (3.).

Wir bezeichnen die durch die Gleichung (2.) bestimmte Matrix kurz durch

$$(7.)\qquad (v_{i\varkappa}) = S\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overbrace{(\xi,\eta)}} (\alpha_{i\varkappa} d\xi + \beta_{i\varkappa} d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

und erhalten auf diese Weise für jeden Punkt (ξ, η) von S, der mit (ξ_0, η_0) durch eine ganz innerhalb S verlaufende rechtwinklig gebrochene Linie $(\xi_0, \eta_0) \ldots (\xi_0, \eta) \ldots (\xi, \eta)$ verbunden werden kann, eine wohlbestimmte Matrix $(v_{i\varkappa})$. Für Punkte (ξ, η) von S, die diese Bedingung nicht erfüllen, kann man entweder durch Drehung des Koordinatensystems erreichen, daß die Bedingung erfüllt wird, oder man kann — wenn man die Transformation der Variablen ξ, η vermeiden will — zwischen (ξ_0, η_0) und (ξ, η) eine hinreichende aber stets endliche Anzahl von Zwischenpunkten so einschalten, daß jeder dieser Punkte in bezug auf den vorhergehenden, und (ξ, η) selbst in bezug auf den letzten dieser Zwischenpunkte die Bedingung erfüllt. Bildet man die Matrix (2.) für jede *Stufe* dieser Treppenlinie, so erhält man schließlich eine wohlbestimmte Matrix $(v_{i\varkappa})$, deren Elemente Funktionen von ξ, η sind, und die die Gleichungen (3.) befriedigt.

Es handelt sich dann noch darum, nachzuweisen, daß die so für jeden Punkt (ξ, η) von S definierte Matrix $(v_{i\varkappa})$ innerhalb S *eindeutig* ist, d. h. daß man zu derselben Matrix $(v_{i\varkappa})$ gelangt, wie auch der (ξ_0, η_0) und (ξ, η) verbindende Treppenweg innerhalb S gewählt wird. Dazu genügt es aber offenbar, nachzuweisen, daß die Gleichung

$$\int\limits_{\eta_0}^{\overbrace{\eta_1}} (\beta_{i\varkappa}(\xi_0, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) \cdot \int\limits_{\xi_0}^{\overbrace{\xi_1}} (\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta_1)\, d\xi + \delta_{i\varkappa})$$

$$= \int\limits_{\xi_0}^{\overbrace{\xi_1}} (\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta_0)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}) \cdot \int\limits_{\eta_0}^{\overbrace{\eta_1}} (\beta_{i\varkappa}(\xi_1, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

besteht, wenn die Punkte (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1) so gelegen sind, daß sich das ganze Rechteck (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_0), (ξ_1, η_1), (ξ_0, η_1) innerhalb S befindet. — Um diesen Nachweis zu führen, kann man z. B. ein ähnliches Verfahren einschlagen, wie das, welches mein Freund *Heffter**) für den Beweis des analogen Satzes im Falle eines gewöhnlichen Integrals angegeben hat.

Die so erhaltene eindeutige Matrix $(v_{i\varkappa})$, die wir auch allgemein, wie in Gleichung (7.) angegeben, bezeichnen wollen, hat dann die Eigenschaft, daß jede ihrer Zeilen für $u_1, \ldots u_m$ eingesetzt, das Differentialsystem (B.) identisch befriedigt, $(v_{i\varkappa})$ stellt also dasjenige Fundamentalsystem des vollständig integrablen Differentialsystems (B.) dar, welches sich für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, während das allgemeinste Fundamentalsystem von (B.), das für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ die willkürlich vorgeschriebenen konstanten Anfangswerte $(u_{i\varkappa}^{(0)})$ annimmt, in der Form

$$(8.) \qquad (u_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa}^{(0)})(v_{i\varkappa})$$

enthalten ist.

Wenngleich diese Definition der Integralmatrix $(v_{i\varkappa})$ des vollständig integrablen Systems (B.) für alle funktionentheoretischen Zwecke vollkommen ausreicht,**) wollen wir doch, um im folgenden in die Bahnen der klassischen Theorie der linearen Differentialgleichungen einlenken zu können, den Begriff *der längs einer Kurve C* erstreckten Integralmatrix einführen. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns dabei auf Kurven C, die ganz innerhalb S verlaufen und eine stetig veränderliche Tangente besitzen, also in der Form

$$\xi = \varphi(t), \qquad \eta = \psi(t)$$

analytisch darstellbar sind, wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ Funktionen mit stetigen Ableitungen nach t bedeuten. — Wir setzen, wenn $\xi_0 = \varphi(t_0)$, $\eta_0 = \psi(t_0)$ ist,

$$\overset{t}{\underset{t_0}{\frown\!\!\!\!\!\int}} ([\alpha_{i\varkappa}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \beta_{i\varkappa}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\, dt + \delta_{i\varkappa})$$

$$= C \overset{(\xi, \eta)}{\underset{(\xi_0, \eta_0)}{\frown\!\!\!\!\!\int}} (\alpha_{i\varkappa}\, d\xi + \beta_{i\varkappa}\, d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

*) Göttinger Nachrichten 1903, Heft 5, S. 312.

**) Vergl. für die analoge Frage im Falle des gewöhnlichen Integrals, *Heffter*, ebenda, 1904, S. 196.

und nennen diesen Ausdruck die längs C von (ξ_0, η_0) nach (ξ, η) hin erstreckte Integralmatrix von (B.). Diese Definition gilt natürlich auch für den Fall, wo die Integrabilitätsbedingungen (C.) nicht erfüllt sind. — Sind aber diese Bedingungen erfüllt und bedeutet $(u_{i\varkappa})$ eine wie oben innerhalb S eindeutig definierte Integralmatrix von (B.), so ergibt sich ohne weiteres,*) daß

$$(9.)\qquad C\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overbrace{(\xi,\eta)}} (\alpha_{i\varkappa}\, d\xi + \beta_{i\varkappa}\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa})^{-1}_{\xi_0,\eta_0} \cdot (u_{i\varkappa}),$$

*also von der Wahl der Kurve C unabhängig ist.***) Daraus folgt nun sofort, daß die längs einer ganz innerhalb S verlaufenden *geschlossenen* Kurve Γ erstreckte Integralmatrix

$$\overbrace{\int_{\Gamma}} (\alpha_{i\varkappa}\, d\xi + \beta_{i\varkappa}\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa}) = 1$$

ist.***)

Hat man einen mehrfach zusammenhängenden Bereich T, innerhalb dessen dieselben Bedingungen erfüllt sind, wie vorhin für S, so denke man sich T durch Querschnitte $l_1, l_2, \ldots$ in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{T}$ verwandelt. Dann ist, wenn die Kurve C innerhalb $\overline{T}$ verläuft,

$$(v_{i\varkappa}) = C\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overbrace{(\xi,\eta)}} (\alpha_{i\varkappa}\, d\xi + \beta_{i\varkappa}\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) = \overline{T}\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overbrace{(\xi,\eta)}} (\alpha_{i\varkappa}\, d\xi + \beta_{i\varkappa}\, d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

wohl innerhalb $\overline{T}$, nicht aber innerhalb T eindeutig, vielmehr verwandelt sich $(v_{i\varkappa})$, wenn die Kurve C einen Querschnitt l_ν überschreitet, in

$$(\gamma_{i\varkappa}^{(\nu)})\,(v_{i\varkappa}),$$

wo $(\gamma_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet.†)

---

*) Vergl. den analogen Schluß bei *Heffter*, Gött. Nachr. 1902, S. 122 ff.

**) Herr *Volterra* führt (a. a. O. S. 79 ff.) diesen Nachweis mit Hilfe seiner „integrali doppii"; auf andere Weise ließe sich ein solcher durch Variationsbetrachtungen (vergleiche *Picard*, Traité I (1891), S. 73 ff.) oder analog, wie es *Heffter* (a. a. O. S. 131 ff.) für gewöhnliche Integrale durchführt, erbringen. Ich komme auf den oben skizzierten Beweis in einem der nächsten Hefte dieses Journals zurück.

***) Vergl. *Volterra* a. a. O. S. 81.

†) Vergl. *Volterra* a. a. O. S. 87.

III.

Es bedeute nun in dem Differentialsysteme

$$\text{(A.)}\qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa} y_\lambda \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

$x=\xi+\eta\sqrt{-1}$ eine komplexe Variable, und die $a_{i\varkappa}$ seien monogene Funktionen von x, die innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches S der x-Ebene holomorph sind. Wir setzen

$$y_\varkappa = u_\varkappa + v_\varkappa\sqrt{-1}, \quad a_{i\varkappa} = \alpha_{i\varkappa} + \beta_{i\varkappa}\sqrt{-1},$$

dann ist

$$\text{(1.)}\qquad \frac{\partial\alpha_{i\varkappa}}{\partial\xi} = \frac{\partial\beta_{i\varkappa}}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\alpha_{i\varkappa}}{\partial\eta} = -\frac{\partial\beta_{i\varkappa}}{\partial\xi}$$

und wir erhalten für die $u_\varkappa$, $v_\varkappa$ das System von Differentialgleichungen

$$\text{(R.)}\qquad \left\{\begin{aligned} du_\varkappa &= d\xi\sum_{\lambda=1}^{n}(\alpha_{\lambda\varkappa}u_\lambda - \beta_{\lambda\varkappa}v_\lambda) - d\eta\sum_{\lambda=1}^{n}(\alpha_{\lambda\varkappa}v_\lambda + \beta_{\lambda\varkappa}u_\lambda), \\ dv_\varkappa &= d\xi\sum_{\lambda=1}^{n}(\alpha_{\lambda\varkappa}v_\lambda + \beta_{\lambda\varkappa}u_\lambda) + d\eta\sum_{\lambda=1}^{n}(\alpha_{\lambda\varkappa}u_\lambda - \beta_{\lambda\varkappa}v_\lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

Bezeichnet man die $u_1, \dots u_n$, $v_1, \dots v_n$ in dieser Reihenfolge mit $w_1, w_2, \dots w_{2n}$ und setzt

$$\text{(R'.)}\qquad dw_\varkappa = d\xi\sum_{\lambda=1}^{2n}\alpha_{\lambda\varkappa}^{(1)} w_\varkappa + d\eta\sum_{\lambda=1}^{2n}\alpha_{\lambda\varkappa}^{(2)} w_\varkappa, \qquad (\varkappa=1,2,\dots 2n)$$

so lauten die von den Koeffizienten gebildeten Matrizen*) in leichtverständlicher Schreibweise wie folgt:

$$\text{(2.)}\qquad \left\{\begin{aligned} \underset{(i,\varkappa=1,2,\dots 2n)}{(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})} &= \begin{pmatrix} \underset{(i,\varkappa=1,2,\dots n)}{\alpha_{i\varkappa}} & \underset{\left(\substack{i=n+1,\dots 2n \\ \varkappa=1,\dots n}\right)}{\beta_{i-n,\varkappa}} \\ \underset{\left(\substack{i=1,\dots n \\ \varkappa=n+1,\dots 2n}\right)}{-\beta_{i,\varkappa-n}} & \underset{(i,\varkappa=n+1,\dots 2n)}{\alpha_{i-n,\varkappa-n}} \end{pmatrix}, \\ \underset{(i,\varkappa=1,2,\dots 2n)}{(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})} &= \begin{pmatrix} \underset{(i,\varkappa=1,2,\dots n)}{-\beta_{i\varkappa}} & \underset{\left(\substack{i=n+1,\dots 2n \\ \varkappa=1,\dots n}\right)}{\alpha_{i-n,\varkappa}} \\ \underset{\left(\substack{i=1,\dots n \\ \varkappa=n+1,\dots 2n}\right)}{-\alpha_{i,\varkappa-n}} & \underset{(i,\varkappa=n+1,\dots 2n)}{-\beta_{i-n,\varkappa-n}} \end{pmatrix}, \end{aligned}\right.$$

---

*) Es möge bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen werden, daß bei der von uns gewählten Schreibweise die *Matrizen* der Koeffizienten eines linearen Differentialsystems, die in einer einzelnen Gleichung auftretenden Koeffizienten in einer *Kolonne* enthalten, also aus dem Koeffizientensysteme, wie es beim Anblick des Differentialsystems erscheint, durch *Transposition* hervorgehen. — Diese von der gewöhnlichen abweichende Bezeichnungsweise hat sich in mancher Hinsicht als zweckmäßig erwiesen.

überdies hat das Differentialsystem (R.) die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man an die Stelle von

$$u_1, \dots u_n, \quad v_1, \dots v_n$$

$$-v_1, \dots -v_n, \quad u_1, \dots u_n$$

setzt. Bedeutet also $w_1, \dots w_{2n}$ ein Lösungssystem von (R'.), so stellt $-w_{n+1}, \dots -w_{2n}, w_1, \dots w_n$ ein zweites Lösungssystem dar.

Zufolge der Relationen (1.) sind für das Differentialsystem (R'.) offenbar die Integrabilitätsbedingungen (C.) erfüllt. Hat man umgekehrt ein Differentialsystem (R'.), in welchem die Koeffizientenmatrizen $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ die durch die Gleichungen (2.) gegebene Form haben, so gilt die unmittelbar einleuchtende, aber wichtige Bemerkung, daß das Bestehen der Integrabilitätsbedingung (C.) für die $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ das Bestehen der Relationen (1.) zwischen den $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ nach sich zieht.

Das durch Spaltung eines komplexen Differentialsystems (A.) *nach realen und imaginären Teilen hervorgehende Differentialsystem* (R.) *ist also das allgemeinste unbeschränkt integrable System* (R'.), *dessen Koeffizientenmatrizen die in* (2.) *angegebene Form haben.*

Wir bilden nunmehr die Integralmatrix

$$(3.)\qquad (w_{i\varkappa}) = S\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overbrace{(\xi,\eta)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)}\,d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}\,d\eta + \delta_{i\varkappa}) \qquad (i,\varkappa = 1, 2, \dots 2n)$$

von (R'.), dann ist

$$(4.)\qquad (w_{i\varkappa})_{\xi_0,\eta_0} = (\delta_{i\varkappa}) = 1.$$

Betrachten wir die n Integralsysteme

$$(5.)\qquad w_{i1}, w_{i2}, \dots w_{i,2n} \qquad (i=1,2,\dots n)$$

von (R.'), so stellen auch

$$(6.)\qquad -w_{i,n+1}, \dots -w_{i,2n}, \ w_{i1}, \dots w_{in} \qquad (i=1,2,\dots n)$$

n Integralsysteme von (R'.) dar. Für $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$ reduziert sich die aus der Vereinigung der Integralsysteme (5.) und (6.) hervorgehende Integralmatrix von (R'.) auf die Einheitsmatrix, diese Integralmatrix muß folglich mit $(w_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \dots 2n)$ identisch sein. Setzen wir also

$$w_{i\lambda} = u_{i\lambda}, \qquad w_{i,\lambda+n} = v_{i\lambda}, \qquad (i,\lambda=1,2,\dots n)$$

so ist

$$(7.)\qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\dots 2n)}{(w_{i\varkappa})} = \begin{pmatrix} \underset{(i,\varkappa=1,2,\dots n)}{u_{i\varkappa}} & \underset{\left(\substack{i=n+1,\dots 2n\\ \varkappa=1,\dots n}\right)}{v_{i-n,\varkappa}} \\ \underset{\left(\substack{i=1,2,\dots n\\ \varkappa=n+1,\dots 2n}\right)}{-v_{i,n-\varkappa}} & \underset{(i,\varkappa=n+1,\dots 2n)}{u_{i-n,\varkappa-n}} \end{pmatrix}.$$

und aus der Form (2.) der Koeffizientenmatrizen des Differentialsystems (R'.) folgt unmittelbar, daß

$$(8.)\qquad \frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_{i\varkappa}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \eta} = -\frac{\partial v_{i\varkappa}}{\partial \xi}$$

ist. Die Elemente der Matrix

$$(9.)\qquad (y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa} + v_{i\varkappa}\sqrt{-1}) \qquad (i,\varkappa=1,2,\dots n)$$

sind folglich monogene Funktionen der komplexen Variabeln $x=\xi+\eta\sqrt{-1}$, die innerhalb S holomorph sind. Die Matrix (9.) stellt offenbar ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialsystems (A.) dar, und zwar dasjenige, welches sich für $x=x_0=\xi_0+\eta_0\sqrt{-1}$ auf die Einheitsmatrix

$$(\delta_{i\varkappa}) \qquad (i,\varkappa=1,2,\dots n)$$

reduziert. Wir setzen

$$(10.)\qquad (y_{i\varkappa}) = S\widehat{\int_{x_0}^{x}}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}) = S\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa}).$$

Damit ist der Existenzbeweis der Lösungen des Differentialsystems (A.) erbracht,*) und zwar so, daß die Art, wie sich die Integrale aus ihren realen und imaginären Teilen zusammensetzen (vergl. die Bemerkungen in der Einleitung S. 264) in übersichtlichster Weise in Evidenz tritt.

Ehe wir in den analytischen Untersuchungen weitergehen, müssen wir einige Sätze formaler Natur zusammenstellen, was in der folgenden Nummer geschehen soll.

IV.

Von einer Matrix $(w_{i\varkappa})$ $(i,\varkappa=1,2,\dots 2n)$ von $(2n)^2$ Elementen, die aus $2n^2$ realen Elementen $u_{i\varkappa}, v_{i\varkappa}$ $(i,\varkappa=1,2,\dots n)$ in der Form (7.) der vorigen Nummer zusammengesetzt ist, wollen wir sagen, daß sie aus der komplexen Matrix

$$(u_{i\varkappa} + v_{i\varkappa}\sqrt{-1}) \qquad (i,\varkappa=1,2,\dots n)$$

---

*) Herr *Volterra* definiert, Memorie etc. t. XII, S. 17, die komplexe Integralmatrix auf andere Weise.

durch Spaltung hervorgegangen sei und sie wohl auch kurz eine *gespaltene Matrix* nennen. Für gespaltene Matrizen gelten dann die folgenden Sätze:

1. Bedeuten

$$(c_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa} + \varepsilon_{i\varkappa}\sqrt{-1}),\qquad (y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa} + v_{i\varkappa}\sqrt{-1}) \qquad (i, \varkappa = 1, \dots n)$$

zwei beliebige komplexe Matrizen, so ist die aus der komponierten Matrix

$$(c_{i\varkappa})\,(y_{i\varkappa})$$

durch Spaltung hervorgehende Matrix aus den aus $(c_{i\varkappa})$ und $(y_{i\varkappa})$ durch Spaltung hervorgegangenen Matrizen in derselben Reihenfolge komponiert.

2. Die aus $(c_{i\varkappa})^{-1}$ durch Spaltung hervorgehende Matrix ist die inverse derjenigen, die aus $(c_{i\varkappa})$ durch Spaltung hervorgegangen ist.

3. Die Wurzeln der Fundamentalgleichung der aus $(c_{i\varkappa})$ durch Spaltung hervorgehenden Matrix*) sind nichts anderes als die Wurzeln der zu $(c_{i\varkappa})$ gehörigen Fundamentalgleichung nebst ihren konjugierten Werten. Die Determinante der gespaltenen Matrix ist also die Norm der Determinante der komplexen Matrix. — Dieser Satz wird am einfachsten dadurch bewiesen, daß man zunächst die Matrix $(c_{i\varkappa})$ auf ihre kanonische Form transformiert, wodurch nach Satz 1. auch die Transformation der gespaltenen Matrix auf die kanonische Form vollzogen ist.

4. Bedeutet $(y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa} + v_{i\varkappa}\sqrt{-1})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$ eine *monogene* Matrix, d. h. eine Matrix, deren n^2 Elemente monogene Funktionen der komplexen Variabeln $x = \xi + \eta\sqrt{-1}$ sind, mit nicht identisch verschwindender Determinante und setzt man

$$\mathrm{D}_x(y_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right),$$

bezeichnet ferner die aus $(y_{i\varkappa})$ durch Spaltung hervorgehende Matrix mit $(w_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \dots 2n)$, so geht $\mathrm{D}_\xi(w_{i\varkappa})$ aus $\mathrm{D}_x(y_{i\varkappa})$, $\mathrm{D}_\eta(w_{i\varkappa})$ aus $\sqrt{-1}\,\mathrm{D}_x(y_{i\varkappa})$**) durch Spaltung hervor.

---

*) Wir verstehen unter der Fundamentalgleichung einer Matrix $(a_{i\varkappa})(i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$ die Gleichung $|a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\,\omega|_{(i,\varkappa=1,2,\dots n)} = 0$ (bei *Cauchy*, Exercices d'Analyse t. I, S. 57, équation caractéristique).

**) In üblicher Weise bezeichnen wir durch $a(a_{i\varkappa})$ diejenige Matrix, die aus $(a_{i\varkappa})$ durch Komposition mit der *skalaren* Matrix $(a\,\delta_{i\varkappa})$ entsteht.

V.

Die allgemeinste Integralmatrix des Systems (R.') ist keine gespaltene, dagegen erhalten wir stets eine gespaltene Integralmatrix, wenn die Matrix ihrer Anfangswerte für einen beliebigen Punkt $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ gespalten ist, also wenn wir die durch die Gleichung (3.) Nr. III definierte Integralmatrix mit einer beliebigen konstanten und gespaltenen Matrix nicht verschwindender Determinante linkerseits komponieren. — Bedeutet also $(c_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$ eine Matrix nicht verschwindender Determinante, deren Elemente die beliebigen komplexen Konstanten

$$c_{i\varkappa} = \gamma_{i\varkappa} + \varepsilon_{i\varkappa}\sqrt{-1}$$

sind, so stellt die aus

$$(1.) \qquad (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa}),$$

wo $(y_{i\varkappa})$ durch (9.) Nr. III definiert ist, durch Spaltung hervorgehende Matrix die allgemeinste gespaltene Integralmatrix von (R.'), also die Matrix (1.) selbst die allgemeinste Integralmatrix des Differentialsystems (A.) dar.

Man sieht nun ohne Schwierigkeit, daß die Rechnungsregeln (I), ... (X) auch für komplexe Größen und Integralmatrizen gültig bleiben, sofern man sich auf den Bereich S, innerhalb dessen die $a_{i\varkappa}$ holomorph sind, beschränkt. Ferner folgt aus den entsprechenden Sätzen über die Integralmatrizen unbeschränkt integrabler Differentialsysteme, daß die längs einer ganz innerhalb S verlaufenden geschlossenen Kurve Γ erstreckte Integralmatrix

$$\Gamma \mathop{\mathrm{I}} (a_{i\varkappa}) = 1$$

ist, und daß, wenn T einen mehrfach zusammenhängenden Bereich bedeutet, innerhalb dessen die $a_{i\varkappa}$ holomorph sind und wir uns T durch Querschnitte $l_1, l_2, \dots$ in den einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{T}$ verwandelt denken, die Integralmatrix

$$C \mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x} (a_{i\varkappa}),$$

erstreckt längs einer beliebig innerhalb T verlaufenden Kurve C, nicht mehr von der Wahl dieser Kurve unabhängig ist, sondern wenn C einen der Quer-

schnitte $l_\varkappa$ überschreitet, aus der innerhalb $\overline{T}$ eindeutig determinierten Integralmatrix

$$\overline{T}\int_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa})$$

durch Linkskomposition mit einer bestimmten konstanten Matrix nicht verschwindender Determinante hervorgeht. —

Für die Determinante einer Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ von (A.) gilt die bekannte *Jacobi*sche Formel*)

$$(2.)\qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\dots n)}{|y_{i\varkappa}|} = \text{const.}\, e^{\int \sum\limits_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}\,dx}.$$

Dieselbe lehrt, daß innerhalb eines Bereiches S, wo die $(a_{i\varkappa})$ holomorph sind, die Determinante einer Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ einen endlichen und von Null verschiedenen Wert besitzt. Diese Bemerkung lehrt ferner, daß im allgemeinen derjenige Bereich Σ, innerhalb dessen die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ holomorph ist, sich nicht mit dem Bereiche S deckt, innerhalb dessen die Koeffizientenmatrix $(a_{i\varkappa})$ holomorph ist, sondern daß der erstere Bereich den letzteren in sich begreift und überdies noch diejenigen Punkte umfaßt, in deren Umgebung die $y_{i\varkappa}$ holomorph sind, für welche aber die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ verschwindet. Ein solcher Punkt ist, wie die Gleichung (2.) zeigt, notwendig ein singulärer Punkt von $\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}$, ferner folgt aus der Gleichung

$$(3.)\qquad (a_{i\varkappa}) = \mathrm{D}_x(y_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right),$$

daß in einem solchen Punkte, die $a_{i\varkappa}$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen müssen. Wir nennen diese Punkte, die also dem Bereiche Σ, nicht aber dem Bereiche S angehören,**) *außerwesentlich singuläre* Punkte des Differentialsystems (A.) oder auch der Matrix $(y_{i\varkappa})$ und legen jedem solchen Punkte diejenige Zahl als *Ordnungszahl* bei, die die Ordnung angibt, von welcher die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ in diesem Punkte verschwindet. Es entsteht nun weiter die Frage nach dem Verhalten der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ in einem

*) Dieses Journal Bd. 29, Werke Bd. IV, S. 403, 404; vergl. *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen (1889), S. 113.

**) Im Anschlusse an *Fuchs*, dieses Journal Bd. 68, S. 378, Werke Bd. I, S. 232; vergl. auch dieses Journal Bd. 123, S. 165.

Bereiche, innerhalb dessen die $a_{i\varkappa}$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen, eine Frage, die wir gleich dahin verallgemeinern, daß wir von einem einfach zusammenhängenden Bereiche T' ausgehen, innerhalb dessen die $a_{i\varkappa}$ nur in einzelnen Punkten $a_1, a_2, \dots a_\varrho$, in deren Umgebung sie eindeutig*) sind, aufhören holomorph zu sein. Diesen Bereich verwandeln wir durch Ausschließen der Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ in einen $(\varrho + 1)$-fach zusammenhängenden T und diesen dann, indem wir die Punkte $a_\varkappa$ mit der Begrenzung von T' durch Querschnitte $l_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \dots \varrho)$ verbinden, in einen einfach zusammenhängenden $\overline{T}$.

Es sei dann x_0 ein fest gewählter Punkt innerhalb $\overline{T}$ und

$$(y_{i\varkappa}) = \overline{T}\int_{x_0}^{x} (a_{i\varkappa}),$$

die innerhalb $\overline{T}$ eindeutig determinierte Integralmatrix von (A.), die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. Bedeutet C_ν einen von x_0 nach x hin verlaufenden Weg, der den Querschnitt l_ν einmal im positiven Sinne überschreitet, so ist

$$C_\nu \int_{x_0}^{x} (a_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)})\,(y_{i\varkappa}),$$

wo $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine konstante Matrix nicht verschwindender Determinante bedeutet, die man wie folgt bestimmen kann. Es sei s_ν eine von x_0 ausgehende geschlossene Kurve, die den Querschnitt l_ν einmal im positiven Sinne passiert, so ist nach der Formel (VIII.) und mit Rücksicht darauf, daß

$$(y_{i\varkappa})_{x_0} = (\delta_{i\varkappa}),$$

$$s_\nu \int_{x_0}^{x_0} (a_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)}). \tag{4.}$$

Dabei ist der Ausgangspunkt x_0 *wesentlich.***) Würden wir nämlich denselben Weg s_ν von einem anderen seiner Punkte, etwa x_1 ausgehend, durchlaufen, so wäre nach (VIII.)

$$s_\nu \int_{x_1}^{x_1} (a_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})_{x_1}^{-1}\,(c_{i\varkappa}^{(\nu)})\,(y_{i\varkappa})_{x_1}; \tag{5.}$$

*) also in *Laurent*sche Reihen entwickelbar.

**) Vergl. *Volterra* a. a. O. S. 18.

setzen wir also

$$\overline{T}\int_{x_1}^{x}(a_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa}),$$

so ist

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})_{x_1}^{-1}(y_{i\varkappa}),$$

und die Matrix (5.) stellt folglich diejenige Substitution dar, die das Fundamentalsystem $(z_{i\varkappa})$ von (A.) erfährt, wenn x den Querschnitt l_ν einmal im positiven Sinne überschreitet.*)

Um nun die analytische Beschaffenheit der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ in der Umgebung der singulären Stelle a_ν angeben zu können, wollen wir**) eine Matrix von einfacher Gestalt zu konstruieren suchen, die beim Überschreiten des Querschnittes l_ν dieselbe Substitution $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$ erfährt wie die Matrix $(y_{i\varkappa})$. Dies gelingt in einfachster Weise, indem wir die Integration eines homogenen linearen Differentialsystems mit konstanten Koeffizienten, etwa in der Form, wie sie *Weierstraß* auf Grund seiner Theorie der bilinearen Formen dargestellt hat,***) heranziehen. Wir ordnen diese Integration nur mit wenigen Worten in unsere Bezeichnungsweise ein.

Sei

$$\text{(6.)} \qquad \frac{d\varphi_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda\varkappa}\varphi_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

ein Differentialsystem, dessen Koeffizienten $A_{i\varkappa}$ Konstanten sind, so läßt sich die Integralmatrix

$$\text{(7.)} \qquad \int_0^t (A_{i\varkappa}) = (\varphi_{i\varkappa})$$

in mehr oder weniger komplizierter Form (je nach dem Grade der Vielfachheit der Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ der Fundamentalgleichung

$$|A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\varrho| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

und den Ordnungszahlen der zugehörigen Elementarteiler) darstellen; ihre

*) Wir sagen, die Matrix $(z_{i\varkappa})$ erfahre eine Substitution $(\gamma_{i\varkappa})$, wenn sich $(z_{i\varkappa})$ in $(\gamma_{i\varkappa})(z_{i\varkappa})$ verwandelt, wo $(\gamma_{i\varkappa})$ eine konstante Matrix nicht verschwindender Determinante bedeutet.

**) Vergl. *Volterra* a. a. O. S. 29 ff.

***) Werke Bd. II (1895) S. 75, 76 (datiert 1875), vergl. die Darstellung bei *Muth*, Elementarteiler (1899) S. 195 ff. Siehe auch *Volterra*, Memorie etc. t. VI. S. 95 ff.

Elemente sind lineare Aggregate von Ausdrücken der Form $t^\lambda e^{\varrho_\varkappa t}$ mit konstanten Koeffizienten. — Setzt man

$$t = \log(x - a_\nu),$$

so verwandelt sich die Matrix (7.) in eine andere, die wir mit $(\psi_{i\varkappa})$ bezeichnen wollen und die ein Fundamentalsystem des *Cauchy*schen Differentialsystems

$$\frac{d\psi_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{A_{\lambda\varkappa}}{x - a_\nu} \psi_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{8.}$$

repräsentiert. Offenbar ist

$$(\psi_{i\varkappa})_{a_\nu+1} = (\delta_{i\varkappa}).$$

Wenn x den Querschnitt l_ν einmal im positiven Sinne überschreitet, so erfährt $(\psi_{i\varkappa})$ eine wohlbestimmte, leicht angebbare konstante Substitution $(\gamma_{i\varkappa})$, d. h. $(\psi_{i\varkappa})$ verwandelt sich in $(\gamma_{i\varkappa})(\psi_{i\varkappa})$. Die Elementarteiler der Matrix $(\gamma_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega)$ sind durch die Matrix $(A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\varrho)$ vollkommen bestimmt, und umgekehrt läßt sich die Matrix $(A_{i\varkappa})$ stets so bestimmen, daß die Matrix $(\gamma_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega)$ vorgeschriebene Elementarteiler besitzt.

Bestimmen wir nun $(A_{i\varkappa})$ so, daß die Elementarteiler der Matrix $(\gamma_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega)$ mit denen der Matrix $(c_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\omega)$ übereinstimmen, so läßt sich nach bekannten Sätzen eine konstante Matrix nicht verschwindender Determinante $(\beta_{i\varkappa})$ so angeben, daß

$$(c_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (\beta_{i\varkappa})(\gamma_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa})^{-1};$$

die Integralmatrix

$$(\beta_{i\varkappa})(\psi_{i\varkappa}) = (\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

von (8.) erfährt dann, wenn x den Querschnitt l_ν einmal im positiven Sinne überschreitet, die Substitution $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$. Wir nennen $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine zu der Substitution $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörige *Cauchy*sche Matrix und bemerken, daß es deren noch unendlich viele gibt, indem nämlich die Wurzeln der Gleichung $|A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\varrho| = 0$ sich durch die Forderung, daß die Matrix $(\gamma_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega)$ vorgeschriebene Elementarteiler besitzen soll nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen, bestimmen. Indem wir diese Unbestimmtheit vorläufig beibehalten, können wir sagen, daß die Matrix

$$(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}(y_{i\varkappa}) = (p_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

in der Umgebung von $x = a_\nu$ eindeutig ist (d. h. daß sich die $p_{i\varkappa}^{(\nu)}$ in dieser

Umgebung nach *Laurent*schen Reihen entwickeln lassen). Durch die Gleichung

$$(9.)\qquad (y_{i\varkappa})=(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})(p_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

ist dann die analytische Form der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ in der Umgebung der singulären Stelle a_ν, in Übereinstimmung mit der klassischen Theorie der linearen Differentialgleichungen, vollkommen festgelegt.

VI.

Indem wir in der Skizzierung der Theorie der linearen Differentialsysteme, wie sie aus dem hier innegehaltenen Gedankengange erwächst, fortfahren, beschränken wir uns auch weiterhin auf die Markierung derjenigen Punkte, in denen unsere Darstellung von der hergebrachten abweicht, und wenden uns nunmehr zu der Betrachtung des Falles, wo die Elemente der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ in den singulären Punkten $a_1, \dots a_\varrho$ *nicht unbestimmt werden.*

In diesem Falle werden die $p_{i\varkappa}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $x=a_\nu$ das Verhalten rationaler Funktionen zeigen, und es haben offenbar*) auch die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Differentialsystems in den Punkten $a_1, \dots a_\varrho$ den Charakter rationaler Funktionen. — Wir werden dann imstande sein, die *Cauchy*sche Matrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ so einzurichten, daß alle Elemente der Matrix $(p_{i\varkappa}^{(\nu)})$ in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorph sind und daß nicht alle Elemente $p_{i\varkappa}^{(\nu)}$ in $x=a_\nu$ verschwinden. Wir sagen dann, daß $(y_{i\varkappa})$ für $x=a_\nu$ zu der *Cauchy*schen Matrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ *gehöre.*

Das Differentialsystem

$$(1.)\qquad \frac{dp_\varkappa}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} p_\lambda \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

wo

$$(2.)\qquad (b_{i\varkappa}^{(\nu)})=\mathrm{D}_x(p_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

ist, besitzt dann in $x=a_\nu$ einen außerwesentlich singulären Punkt, da die Determinante $|p_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ im allgemeinen für $x=a$ noch von einer endlichen, ganzzahligen Ordnung verschwindet. Es ist nämlich zufolge der *Jacobi*schen

*) Vergl. *Koenigsberger* a. a. O., S. 446, *Sauvage,* Théorie générale des Systèmes d'équations diff. lin. et homog. (Paris, 1895) S. 103.

Gleichung (2.) Nr. V in der Umgebung von $x=a_\nu$

$$|p_{i\varkappa}^{(\nu)}|_{(i,\varkappa=1,2,\dots n)} = (x-a_\nu)^R\,\mathfrak{P}(x-a_\nu), \quad \mathfrak{P}(0)\neq 0,$$

wo $\mathfrak{P}(x-a_\nu)$ eine in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorphe Funktion bedeutet und

$$R = \mathrm{Res}_{a_\nu}\sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa} - \sum_{\varkappa=1}^{n}\varrho_\varkappa$$

gesetzt wurde.

Wenn $R=0$, *also die Determinante* $|p_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ *für* $x=a_\nu$ *von Null verschieden ist,* so ist auch $(p_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}$ und folglich auch $(b_{i\varkappa}^{(\nu)})$ in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorph. Da nun nach den Gleichungen (9.) Nr. V, (2.) und der Formel (III.)

$$(a_{i\varkappa}) = \mathrm{D}_x(y_{i\varkappa}) = (p_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}\,\mathrm{D}_x(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})(p_{i\varkappa}^{(\nu)}) + (b_{i\varkappa}^{(\nu)}),$$

also

$$(a_{i\varkappa}) = (p_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}\Big(\frac{A_{i\varkappa}}{x-a_\nu}\Big)(p_{i\varkappa}^{(\nu)}) + (b_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

ist, so werden in diesem Falle die $a_{i\varkappa}$ in $x=a_\nu$ *höchstens von der ersten Ordnung unendlich.* Daraus folgt:

$$(\mathrm{Res}_{a_\nu} a_{i\varkappa}) = (p_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}_{a_\nu}(A_{i\varkappa})(p_{i\varkappa}^{(\nu)})_{a_\nu},$$

d. h. die Elementarteiler der beiden Matrizen

$$(\mathrm{Res}_{a_\nu} a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r) \quad \text{und} \quad (A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r)$$

stimmen in diesem Fall überein. Wir sagen dann, das Differentialsystem (A.) habe für $x=a_\nu$ die *Normalform.**) Für diesen Fall ist die *Cauchy*sche Matrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ durch die zu $x=a_\nu$ gehörige *Residuenmatrix*

$$(\mathrm{Res}_{a_\nu} a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r)$$

allein vollkommen bestimmt.

Wenn $R>0$ *ist,* also $|p_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ für $x=a_\nu$ von der R-ten Ordnung verschwindet, so verfahren wir wie folgt. Durch Anwendung eines Verfahrens,

---

*) Diese Definition ist enger als die von Herrn *Horn*, Mathem. Annalen Bd. 40, S. 527, für die von ihm sogenannten kanonischen Systeme (auf die wir weiter unten im Texte zurückkommen) gegebene. Wir bemerken, daß die Sätze, die Herr *Volterra* a. a. O. S. 26—29 für beliebige im Sinne des Herrn *Horn* kanonische Systeme ausspricht, nur für diejenigen Systeme richtig sind, die in dem von uns festgesetzten Sinne die Normalform haben.

welches dem *Kronecker*schen Reduktionsverfahren*) nachgebildet und als besonderer Fall in demjenigen enthalten ist, welches mein Freund *Hensel* in der Theorie der algebraischen Funktionen zur Reduktion eines beliebigen Basissystems auf ein normales anwendet,**) kann man die Matrix $(p_{i\varkappa}^{(\nu)})$ durch Rechtskomposition mit sogenannten *Elementarmatrizen* derart umformen, daß sie die Form

$$(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})\begin{pmatrix}(x-a_\nu)^{\gamma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (x-a_\nu)^{\gamma_2} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & (x-a_\nu)^{\gamma_n}\end{pmatrix}$$

annimmt, wo $(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorphe Matrix ist, deren Determinante $|\pi_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ für $x=a_\nu$ nicht verschwindet und $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ nicht negative ganze Zahlen bedeuten, deren Summe

$$\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n=R$$

ist. Die dabei zur Anwendung kommenden Elementarmatrizen bewirken entweder Vertauschung zweier Kolonnen von $(p_{i\varkappa}^{(\nu)})$ oder Multiplikation einer Kolonne mit einer Konstanten, oder endlich Subtraktion einer mit const. $(x-a_\nu)^g$ (g eine nicht negative ganze Zahl) multiplizierten Kolonne von einer anderen; die Determinante einer solchen Elementarmatrix ist stets eine von Null verschiedene Konstante. Wir haben also

$$(3.)\qquad (p_{i\varkappa}^{(\nu)})=(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})(\delta_{i\varkappa}(x-a_\nu)^{\gamma_\varkappa})(g_{i\varkappa}),$$

wo $(g_{i\nu})$ eine Matrix bedeutet, deren Elemente lineare Aggregate mit konstanten Koeffizienten von nicht negativen ganzzahligen Potenzen von $x-a_\nu$ sind und deren Determinante einen von Null verschiedenen konstanten Wert besitzt. Eine solche Matrix $(g_{i\varkappa})$ wollen wir eine *neutrale* nennen.

Die Matrix

$$(4.)\qquad (z_{i\varkappa})=(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

befriedigt dann ein Differentialsystem

$$(5.)\qquad \frac{dz_\varkappa}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda, \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

*) Dieses Journal Bd. 107 (1891), S. 135 ff.

**) Siehe z. B. *Hensel* und *Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen, (1902), S. 169 ff.

wo

$$(b_{i\varkappa}) = \mathrm{D}_x(z_{i\varkappa}) = (\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}\left(\frac{A_{i\varkappa}}{x-a_\nu}\right)(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)}) + \mathrm{D}_x(\pi_{i\varkappa})$$

ist, und das System (5.) hat in der Umgebung von $x = a_\nu$ die Normalform. Da nun

$$(y_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})(\delta_{i\varkappa}(x-a_\nu)^{\gamma_\varkappa})(g_{i\varkappa})$$

ist, erhalten wir den Satz:*)

Wenn die Lösungen des Differentialsystems

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}\, y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

im Punkte $x = a_\nu$ nicht unbestimmt werden, so wird dieses System durch eine Transformation

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda (x-a_\nu)^{\gamma_\lambda} g_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

wo die γ_λ nicht negative ganze Zahlen, $(g_{\lambda\varkappa})$ eine neutrale Matrix bedeutet, in ein Differentialsystem (5.) übergeführt, welches für $x = a_\nu$ die Normalform hat.

VII.

Unter den mannigfachen Formen, die das Koeffizientensystem $a_{i\varkappa}$ in der Umgebung einer Stelle $x = a_\nu$, wo die Lösungen nicht unbestimmt werden, annehmen kann, sind zwei darum besonders bemerkenswert, weil sie zugleich die hinreichenden Bedingungen für die gedachte Beschaffenheit der Lösungen in sich bergen. Die eine dieser Formen ist die, wo die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ in $x = a_\nu$ höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen, es ist die von Herrn *Horn* als *kanonische* bezeichnete, welche wohl Herr *Sauvage***) zuerst betrachtet, die aber erst durch Herrn *Horn****) eine erschöpfende Behandlung erfahren hat. Wir haben an diese kanonischen Systeme

$$(1.) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\mathfrak{P}_{\lambda\varkappa}(x-a_\nu)}{x-a_\nu}\, y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

---

*) Vergl. *Koenigsberger* a. a. O., S. 449, *Horn* a. a. O., S. 550, *Sauvage* a. a. O., S. 101 ff.

**) Annales de l'École Normale (II), Bd. 3 (1886), S. 391 ff.

***) Mathem. Annalen Bd. 39 (1892), S. 391 ff.

wo $\mathfrak{P}_{i\varkappa}(x-a_\nu)$ in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorphe Funktionen bedeuten, nur zwei Bemerkungen zu knüpfen.

1. Es sei $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix von (1.) und

$$(2.)\qquad (y_{i\varkappa}) = (\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})(\delta_{i\varkappa}(x-a_\nu)^{\gamma_\varkappa})(g_{i\varkappa}),$$

wo $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine *Cauchy*sche, $(g_{i\varkappa})$ eine neutrale Matrix bedeutet, dann kann man durch rein algebraische Operationen*) an den Koeffizienten des Differentialsystems (1.) die $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$, $(g_{i\varkappa})$ und die ganzen Zahlen $\gamma_\varkappa$ so bestimmen, daß das Differentialsystem, welchem die $(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})$ genügen, in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorphe Koeffizienten besitzt. Daraus folgt nun ohne weiteres, daß die $\pi_{i\varkappa}^{(\nu)}$ selbst in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorph sind und damit ist gezeigt, daß die Lösungen des in der Umgebung von $x=a_\nu$ kanonischen Differentialsystems (1.) in $x=a_\nu$ nicht unbestimmt werden. Es erscheint als ein wesentlicher Vorzug der hier angedeuteten Methode, daß der gedachte Nachweis geführt werden kann, ohne auf Konvergenzbetrachtungen eingehen zu müssen, wie sie die klassische Theorie erfordert.

Da die Matrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})(\pi_{i\varkappa}^{(\nu)})$ einem Differentialsysteme genügt, dessen Koeffizienten in der Umgebung von $x=a_\nu$ eindeutig sind und welches für $x=a_\nu$ die Normalform besitzt, kommt die Darstellung (2.) wesentlich auf die Transformation des Differentialsystems (1.) auf ein solches hinaus, das für $x=a_\nu$ die Normalform besitzt. In dem besonderen Falle, wo die zum Punkte $x=a_\nu$ gehörige *determinierende Fundamentalgleichung* des Systems (1.) d. h. die Gleichung

$$(3.)\qquad \left|\operatorname{Res}_{a_\nu}\frac{\mathfrak{P}_{i\varkappa}(x-a_\nu)}{x-a_\nu}-\delta_{i\varkappa}r\right|=0, \qquad (i,\varkappa=1,2,\ldots n)$$

weder mehrfache noch solche Wurzeln besitzt, die sich um ganze Zahlen von einander unterscheiden, hat das kanonische System (1.) schon selbst für $x=a_\nu$ die Normalform, die Matrizen $(\delta_{i\varkappa}(x-a_\nu)^{\gamma_\varkappa})$ und $(g_{i\varkappa})$ fallen also weg und die Aufstellung des *Cauchy*schen Differentialsystems für $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gestaltet sich besonders einfach.

2. Durch Linkskomposition mit einer konstanten Matrix nicht verschwindender Determinante kann die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ von (1.) in eine sogenannte *kanonische* Integralmatrix $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$, die zum Punkte $x=a_\nu$ gehört,

---

*) Die im Anschlusse an *Horn* a. a. O. und auf Grund der Erörterungen der vorigen Nummer unschwer anzugeben sind.

verwandelt werden, d. h. in eine Matrix, deren Elemente die Form

$$(4.)\qquad \eta_{i\varkappa}^{(\nu)} = (x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} L_{i\varkappa}$$

haben, wo die $L_{i\varkappa}$ ganze rationale Funktionen von $\log(x-a_\nu)$ mit in der Umgebung von $x=a_\nu$ holomorphen Koeffizienten bedeuten, die $r_1^{(\nu)}, \dots r_n^{(\nu)}$ nichts anderes sind als die Wurzeln der Gleichung (3.) und in jeder Zeile $\eta_{i1}^{(\nu)}, \eta_{i2}^{(\nu)}, \dots \eta_{in}^{(\nu)}$ mindestens ein Element $\eta_{i\varkappa_i}^{(\nu)}$ vorkommt, welches im Sinne von *Fuchs* *) zu $r_i^{(\nu)}$ als Exponenten gehört, d. h. für welches $L_{i\varkappa_i}$ für $x=a_\nu$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt.**) Es ist dann

$$(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (\delta_{i\varkappa}(x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}})(L_{i\varkappa}),$$

und da nach dem *Jacobi*schen Satze (2.) Nr. V die Determinante $|\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ genau zu $r_1^{(\nu)} + r_2^{(\nu)} + \dots + r_n^{(\nu)}$ als Exponenten gehört, so besitzt die Determinante $|L_{i\varkappa}|$ für $x=a_\nu$ einen endlichen und von Null verschiedenen Wert.

Diese Beschaffenheit ist für ein Fundamentalsystem eines Differentialsystems, welches für $x=a_\nu$ die kanonische Form (1.) hat, *charakteristisch*. Denn wenn ein Differentialsystem (A.) eine Integralmatrix $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ besitzt, deren Elemente in der Form (4.) darstellbar sind, so ist nach der Regel (III.)

$$(a_{i\varkappa}) = \mathrm{D}_x(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (L_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{\delta_{i\varkappa} r_i^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)(L_{i\varkappa}) + \mathrm{D}_x(L_{i\varkappa}),$$

die $(a_{i\varkappa})$ besitzen folglich, da

$$\lim_{x=a_\nu} |L_{i\varkappa}| \neq 0$$

ist, in $x=a_\nu$ höchstens einen Pol erster Ordnung.

Durch Rechtskomposition von $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ mit einer neutralen Matrix $(g_{i\varkappa})$ kann man stets erreichen, daß *alle* Elemente einer Zeile der Matrix

$$(5.)\qquad (\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})(g_{i\varkappa})$$

zu *demselben* Exponenten gehören; die Matrix (5.) befriedigt dann ein Differentialsystem mit der Koeffizientenmatrix

$$(g_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(g_{i\varkappa}) + \mathrm{D}_x(g_{i\varkappa}),$$

welches also für $x=a_\nu$ ebenfalls die kanonische Form hat.

*) Dieses Journal Bd. 66, S. 142, Werke Bd. I, S. 181.

**) Vergl. *Horn*, a. a. O.

Die zweite der obenerwähnten beiden Formen der Koeffizienten eines Differentialsystems (A.), dessen Lösungen in $x = a_\nu$ nicht unbestimmt sind, ist die, welche *Fuchs**) für die Koeffizienten einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung aufgestellt hat. Während für ein Differentialsystem (A.) die kanonische Form im Punkte a_ν sich als *hinreichend* dafür erweist, daß die Lösungen in $x = a_\nu$ nicht unbestimmt werden, ist die *Fuchs*sche Form der Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung für diese Eigenschaft ihrer Lösungen *notwendig* und *hinreichend*. Da für die Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung eine notwendige und hinreichende Form von gleicher Einfachheit nicht gefunden werden kann, *muß für die Untersuchung eines Funktionssystems, welches einem Systeme linearer Differentialgleichungen genügt, in der Umgebung einer singulären Stelle die Theorie einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung als der genuine Ausgangspunkt angesehen werden.* Man übersieht auch, wie der Beweis dafür, daß die *Fuchs*sche Form der Koeffizienten hinreichend ist, in der oben für kanonische Systeme angedeuteten Weise von der Konvergenzuntersuchung formal aufgestellter Potenzreihen entlastet werden kann.

Hat man ein beliebiges Differentialsystem

$$\text{(A.)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa} y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

dessen Koeffizienten in der Umgebung von $x = a_\nu$ eindeutig und dessen Lösungen in $x = a_\nu$ nicht unbestimmt sind, so setze man

$$\text{(5.)} \qquad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

Bestimmt man die $r_{i\varkappa}$ so, daß

$$\text{(6.)} \qquad r_{\lambda,\varkappa+1} = \frac{dr_{\lambda\varkappa}}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} r_{\nu\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n-1;\ \lambda = 1, 2, \dots n)$$

dann ist

$$\text{(7.)} \qquad z_2 = \frac{dz_1}{dx}, \quad z_3 = \frac{dz_2}{dx}, \quad \dots \quad z_n = \frac{dz_{n-1}}{dx},$$

also z_1 die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung im

*) Dieses Journal Bd. 66, S. 146, Bd. 68, S. 360, Werke Bd. I, S. 186, 212.

allgemeinen n-ter Ordnung

$$(8.)\qquad \frac{d^n z_1}{dx^n} = b_{nn}\frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} + b_{n-1,n}\frac{d^{n-2} z_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{1n} z_1,$$

deren Koeffizienten durch die Gleichung

$$(9.)\qquad (b_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}) + \mathrm{D}_x(r_{i\varkappa})$$

bestimmt werden, wo zufolge der Relationen (6.)

$$b_{i\varkappa} = 0 \text{ für } i \neq \varkappa + 1, \qquad b_{\varkappa+1,\varkappa} = 1. \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n-1)$$

Wählt man die noch willkürlichen n Größen $r_{\lambda 1}$ ($\lambda = 1, 2, \dots n$) konstant oder als Funktionen, die in der Umgebung von $x = a_\nu$ eindeutig und in $x = a_\nu$ nur wie rationale Funktionen unendlich sind, so muß die Differentialgleichung (8.) in der Umgebung von $x = a_\nu$ die *Fuchs*sche Form haben. Dies liefert zugleich das praktisch am bequemsten zu handhabende Kriterium dafür, daß die Lösungen von (A.) in $x = a_\nu$ nicht unbestimmt werden.*)

Bedeutet $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Systems (A.), so bilden die Elemente der ersten Kolonne der Matrix

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (8.), die Elemente der folgenden Kolonne sind zufolge der Gleichungen (7.) die sukzessiven Derivierten der entsprechenden Elemente der ersten Kolonne. Wir werden eine solche Matrix

$$(z_{i\varkappa}) = \left(\frac{d^{\varkappa-1} z_{i1}}{dx^{\varkappa-1}}\right) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

kurz eine *Wronski*sche nennen. Für Untersuchungen substitutionen- und gruppentheoretischer Natur, namentlich auch für diejenigen, die im Sinne der Herren *Picard* und *Vessiot* an die *Transformationsgruppe* anknüpfen, bildet die Beziehung, die zwischen den Kolonnen einer *Wronski*schen Matrix besteht, einen beengenden Zwang, von welchem uns der Übergang zu der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ eines beliebigen Differentialsystems (A.) befreit.

*) Vergl. *Sauvage*, Théorie etc. (1895), p. 123.

VIII.

Wir betrachten nun noch kurz diejenigen Systeme linearer Differentialgleichungen

$$\text{(A.)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa} y_\lambda, \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen von x und deren Integrale an keiner Stelle unbestimmt sind (*Systeme der Fuchsschen Klasse*).

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System (A.) zur *Fuchs*schen Klasse gehört, kann am einfachsten dahin formuliert werden, daß die Differentialgleichung n-ter Ordnung, der z_1 genügt, wenn man

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

setzt und die $r_{\lambda\varkappa}$ als *rationale Funktionen* von x den Gleichungen (6.) voriger Nummer gemäß wählt, ihrerseits zur *Fuchs*schen Klasse gehört.*)

Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Differentialsysteme mit rationalen Koeffizienten, die in der Umgebung jeder singulären Stelle ($x=\infty$ eingeschlossen) die kanonische Form haben. Wir wollen solche Systeme schlechthin *kanonische* nennen; sie gehören natürlich stets zur *Fuchs*schen Klasse. Bedeuten $a_1, \dots a_\varrho$ die singulären Punkte der Koeffizienten eines kanonischen Systems und setzt man

$$\varphi(x) = (x-a_1)\dots(x-a_\varrho),$$

so hat dieses System die Form**)

$$\text{(1.)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{h_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)} y_\lambda, \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

wo die $h_{i\varkappa}(x)$ ganze rationale Funktionen von nicht höherem als dem $(\varrho-1)$-ten Grade bedeuten. Die in der Nr. V mit T' bezeichnete Fläche umfaßt jetzt alle endlichen Werte von x, die Schnitte $l_\nu\,(\nu=1,2,\dots\varrho)$ laufen von den Punkten a_ν aus nach dem Unendlichen.

---

*) Diese Differentialgleichung kann nur dann von niedrigerer als der n-ten Ordnung werden, wenn das System (A.) reduzibel ist.

**) *Koenigsberger* a. a. O., S. 453.

Wir denken uns die Koeffizienten von (1.) in Partialbrüche zerlegt und setzen dann

$$(1^a.)\qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}, \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

wo also die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ Konstanten bedeuten. Es sei x_0 ein regulärer Punkt und

$$(2.)\qquad (y_{i\varkappa}) = \overline{T}\int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big),$$

dann liefern die Matrizen (vergl. Gleichung (4.) Nr. V)

$$(3.)\qquad s_\lambda \int_{x_0}^{x_0} \Big(\sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big) = (\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}) \qquad (\lambda=1,2,\dots\varrho)$$

die Substitutionen, die die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ erfährt, wenn x die Querschnitte l_λ einmal im positiven Sinne überschreitet. Die Elementarteiler der Matrix

$$(\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa}\,\omega)$$

sind durch die Elementarteiler der Residuenmatrix

$$(A_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa}\, r)$$

bestimmt, wenn das System (1.) für $x=a_\lambda$ die Normalform hat, also insbesondere, wenn die Wurzeln $r_1^{(\lambda)}, \dots r_n^{(\lambda)}$ der zu a_λ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung

$$(4.)\qquad |A_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa}\, r| = 0$$

weder verschwindende noch ganzzahlige Differenzen haben. Allgemein kann man nur sagen, daß die Wurzeln der zu $(\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ gehörigen Fundamentalgleichung durch

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_1^{(\lambda)}}, \dots e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_n^{(\lambda)}}$$

gegeben werden.

Nach dem *Jacobi*schen Satze (Gleichung (2.) Nr. V) ist

$$(5.)\qquad |y_{i\varkappa}| = \text{const.} \prod_{\nu=1}^{\varrho} (x-a_\nu)^{\sum_{\lambda=1}^{n} r_\lambda^{(\nu)}}.$$

Es seien $a_1, \dots a_\sigma$ die wesentlichen, $a_{\sigma+1}, \dots a_\varrho$ die außerwesentlich singulären

Punkte des Differentialsystems (1.), und es mögen $\mathfrak{r}_1^{(\nu)}, \dots \mathfrak{r}_m^{(\nu)}$ die in abnehmender Reihe geordneten von einander verschiedenen Wurzeln der zu $a_{\sigma+\nu}$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung bedeuten, und zwar sei $\mathfrak{r}_\varkappa^{(\nu)}$ eine $\lambda_\varkappa$-fache Wurzel. Dann muß die zu $a_{\sigma+\nu}$ gehörige Residuenmatrix

$$(6.)\qquad (A_{i\varkappa}^{(\sigma+\nu)} - \delta_{i\varkappa} r)$$

lauter einfache Elementarteiler haben und die ganzen Funktionen $h_{i\varkappa}(x)$ haben überdies noch

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + (m-1)\lambda_m$$

Bedingungen zu erfüllen, die den Fortfall der Logarithmen in den Entwicklungen der Integrale in der Umgebung von $x = a_{\sigma+\nu}$ bewirken.*) Der Punkt $a_{\sigma+\nu}$ ist dann ein außerwesentlich singulärer Punkt von der Ordnung**)

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} \lambda_\varkappa \mathfrak{r}_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{r}_\nu. \qquad (\nu = 1, 2, \dots \varrho-\sigma)$$

Für einen außerwesentlich singulären Punkt *erster* Ordnung hat die zugehörige determinierende Fundamentalgleichung die einfache Wurzel 1 und die $(n-1)$-fache Wurzel 0 und die $h_{i\varkappa}(x)$ haben außer den Bedingungen, die bewirken, daß die Residuenmatrix (6.) $(n-1)$-mal den einfachen Elementarteiler r besitzt, noch $n-1$ Bedingungen zu erfüllen.

Bezeichnen wir mit $h_{i\varkappa}^{(0)}$ den Koeffizienten von $x^{\varrho-1}$ in $h_{i\varkappa}$, so ist

$$h_{i\varkappa}^{(0)} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} A_{i\varkappa}^{(\nu)},$$

und es stellt

$$(7.)\qquad |-h_{i\varkappa}^{(0)} - \delta_{i\varkappa} r| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung dar.***) Sind $r_1^{(\infty)}, \dots r_n^{(\infty)}$ ihre Wurzeln, so besteht die wichtige Gleichung

$$(8.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma} \sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa^{(\nu)} + \sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa^{(\infty)} = -\sum_{\nu=1}^{\varrho-\sigma} \mathfrak{r}_\nu,$$

*) Vergl. *Horn*, Mathem. Annalen Bd. 39, S. 401.

**) Vergl. dieses Journal Bd. 123, S. 163, 164; siehe auch oben S. 279.

***) Damit $x = \infty$ ein regulärer Punkt sei, ist notwendig und hinreichend, daß alle $h_{i\varkappa}^{(0)}$ verschwinden, d. h. daß die $h_{i\varkappa}(x)$ höchstens vom Grade $\varrho - 2$ sind.

d. h. die negativ genommene Summe der Wurzeln der zu allen wesentlich singulären Punkten gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen gibt die Anzahl der einfach zu zählenden außerwesentlich singulären Punkte an; diese Summe ist also stets eine nicht negative ganze Zahl. Die Gleichung (8.) entspricht der sogenannten *Fuchsschen Relation* in der Theorie der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung.*)

Wir sagen von der Matrix

$$(9.)\qquad (z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}),$$

sie sei mit der Matrix $(y_{i\varkappa}) = \overline{T}\int_{x_0}^{x} (a_{i\varkappa})$ *kogredient*, wenn die $r_{i\varkappa}$ *eindeutige* Funktionen von x bedeuten, deren Determinante $|r_{i\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet. Sind die $(r_{i\varkappa})$ insbesondere *rationale* Funktionen von x, so gehört $(z_{i\varkappa})$ mit $(y_{i\varkappa})$ zu derselben *Art*, und die gleichen Bezeichnungen übertragen sich auf die Differentialsysteme, denen die kogredienten oder zu derselben Art gehörigen Matrizen genügen. Die Koeffizienten des Differentialsystems

$$(\mathrm{B.})\qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda, \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

dem die $z_{i\varkappa}$ genügen, ergeben sich nach (III.) in der Form

$$(10.)\qquad (b_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}) + \mathrm{D}_x(r_{i\varkappa}).$$

Aus (10.) folgt, mit Rücksicht auf die Definition des Symbols D_x,

$$\left(\frac{dr_{i\varkappa}}{dx}\right) = (r_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}) - (a_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}),$$

d. h. die $r_{i\varkappa}$ befriedigen**) das System von n^2 linearen homogenen Differentialgleichungen

$$(\mathrm{D.})\qquad \frac{dr_{i\varkappa}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} (r_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa} - a_{i\lambda} r_{\lambda\varkappa}). \qquad (i,\varkappa=1,2,\dots n)$$

Will man für gegebene $(a_{i\varkappa})$ die Gesamtheit aller Differentialsysteme (B.) mit *rationalen* Koeffizienten aufsuchen, die mit dem Differentialsysteme (A.) kogredient sind, so hat man die $b_{i\varkappa}$ als rationale Funktionen von x so zu bestimmen, daß das Differentialsystem (D.) ein eindeutiges Lösungssystem

*) Dieses Journal Bd. 66, S. 142, 145; Werke Bd. I, S. 181, 186, Gln. (5.), (10.).

**) Vergl. *Fuchs*, Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1888, S. 1273 ff.; *Schlesinger*, dieses Journal Bd. 124, S. 50.

besitzt. Es ist dies eine Aufgabe wesentlich arithmetischer Natur, die, wie es scheint, sehr große und eigentümliche Schwierigkeiten darbietet, deren Lösung aber für die Weiterentwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen von erheblicher Bedeutung wäre.

Bedeutet (B.) ein Differentialsystem der *Fuchs*schen Klasse, so ist die Frage von Wichtigkeit, wie man die $(r_{i\varkappa})$ als rationale Funktionen von x zu wählen hat, damit das Differentialsystem (A.), dem $(y_{i\varkappa})$ genügt, ein schlechthin kanonisches sei. Diese Frage, mit der sich auch Herr *Koenigsberger**) beschäftigt hat, kann aber noch wesentlich schärfer gefaßt werden, wenn man den Begriff der *Klasse* (im Sinne von *Riemann*) an die Stelle des Artbegriffes treten läßt. Wir sagen nämlich, die beiden Matrizen $(z_{i\varkappa})$, $(y_{i\varkappa})$ und die Differentialsysteme (B.), (A.), denen diese Matrizen genügen, gehören zu derselben Klasse, wenn sie zu derselben Art gehören und überdies dieselben wesentlich singulären Punkte haben; in diesem Falle muß also**) die rationale Matrix $(r_{i\varkappa})$ so beschaffen sein, daß ihre Elemente nur in den singulären Punkten der Matrix $(y_{i\varkappa})$ unendlich werden und zwar so, daß für einen außerwesentlich singulären Punkt $\mathfrak{r}$-ter Ordnung von $(y_{i\varkappa})$ die Determinante $|r_{i\varkappa}|$ höchstens einen Pol $\mathfrak{r}$-ter Ordnung besitzt; die von den wesentlich singulären Stellen verschiedenen Nullpunkte der Determinante $|r_{i\varkappa}|$ bestimmen dann die Lage und die Ordnungszahl der außerwesentlich singulären Punkte der Matrix $(z_{i\varkappa})$. — Man kann alsdann sich die Aufgabe stellen, die rationale Matrix $(r_{i\varkappa})$ so zu bestimmen, daß für ein gegebenes Differentialsystem (B.) der *Fuchs*schen Klasse, $(y_{i\varkappa})$ einem mit (B.) zu derselben Klasse gehörigen kanonischen Differentialsysteme Genüge leistet. Wir gehen hier auf eine Diskussion dieser Aufgabe nicht ein, da dieselbe auf Grund eines Satzes, dessen Darlegung einem anderen Aufsatze vorbehalten bleibt, in viel tiefergehender Weise formuliert und erledigt werden kann.

IX.

Zum Schlusse dieser Abhandlung mögen noch einige Bemerkungen formaler Natur gestattet sein, die sich auf die einem Differentialsysteme (A.) *assoziierten* Systeme beziehen.

*) a. a. O., S. 453.

**) Vergl. dieses Journal Bd. 123, S. 164ff. und ausführlicher, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. II, 1 (1897), S. 376ff.

Bedeutet $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Differentialsystems (A.) und bilden wir die sämtlichen $(n_m)^2$ in dieser Matrix enthaltenen Subdeterminanten m-ter Ordnung, so bildet die aus diesen $(n_m)^2$ Größen als Elementen zusammengesetzte Matrix die Integralmatrix eines linearen Differentialsystems (n_m)-ter Klasse, welches das $(n-m)$-te zu (A.) *assoziierte* Differentialsystem genannt werden soll. Bei der Bildung der aus den $(n_m)^2$ Subdeterminanten bestehenden Matrix, die selbst als die $(n-m)$-te *assoziierte Matrix* von $(y_{i\varkappa})$ bezeichnet werden kann, hat man darauf zu achten, daß diejenigen Subdeterminanten, die einem bestimmten Systeme von m Zeilen der Matrix $(y_{i\varkappa})$ entnommen sind, in eine Zeile der assoziierten Matrix und ebenso die einem bestimmten Systeme vom m Kolonnen von $(y_{i\varkappa})$ entstammenden Subdeterminanten in eine Kolonne der assoziierten Matrix zu ordnen sind. Die Bestimmung der Koeffizienten des $(n-m)$-ten assoziierten Differentialsystems gestaltet sich äußerst einfach. Man findet in leicht verständlicher Bezeichnungsweise:

$$\frac{d}{dx} \underset{\begin{pmatrix} i = i_1, \dots i_m \\ \varkappa = \varkappa_1, \dots \varkappa_m \end{pmatrix}}{|y_{i\varkappa}|} = \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\mu = \varkappa_\lambda, \varkappa_{m+1}, \dots \varkappa_n} a_{\mu\varkappa_\lambda} \underset{\begin{pmatrix} i = i_1, \dots i_\lambda, \dots i_m \\ \varkappa = \varkappa_1, \dots \mu, \dots \varkappa_m \end{pmatrix}}{|y_{i\varkappa}|} .$$

Für $m=2$ hat *Fuchs**) gelegentlich das assoziierte System aufgestellt; für $m=n-1$ ergibt sich für das erste assoziierte System:

$$\frac{dz_\varkappa}{dz} = \sum_{g=1}^{n} \Big(-a_{\varkappa g} + \delta_{g\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}\Big) z_g, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

setzt man hierin

$$z_g = \underset{(i, \varkappa = 1, 2, \dots n)}{|y_{i\varkappa}|} \cdot \eta_g, \qquad (g = 1, 2, \dots n)$$

so erhält man mit Rücksicht auf die *Jacobi*sche Gleichung (2.) Nr. V das von *Jacobi***) aufgestellte dem Differentialsysteme (A.) *adjungierte System*

$$(\bar{\text{A}}.) \qquad \frac{d\eta_\varkappa}{dx} = -\sum_{g=1}^{n} a_{\varkappa g} \eta_g. \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

Die Sätze die ich***) für die zu einer linearen homogenen Differential-

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1898, S. 478, 479.

**) Dieses Journal Bd. 27, S. 199, Bd. 29, S. 213, 333, Werke Bd. IV, S. 404; *Jacobi* bezeichnet die Systeme (A.) und ($\bar{\text{A}}$.) als „systemata inter se *con*iugata".

***) Handbuch etc. Bd. II, 1, S. 125—157.

gleichung n-ter Ordnung assoziierten Differentialgleichungen entwickelt habe, lassen sich ohne Schwierigkeit auf die assoziierten Differentialsysteme übertragen und gewinnen für die letzteren, namentlich soweit sie sich auf assoziierte Arten, Gruppen usw. beziehen, eine viel einfachere und elegantere Gestalt. Aber auch für die allgemeineren Untersuchungen die Herr *A. Loewy* neuerdings*) angestellt hat, dürfte es von Vorteil sein, an Stelle der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung ein lineares Differentialsystem erster Ordnung und n-ter Klasse zum Ausgangspunkte zu nehmen.

*) Transactions of the Americ. Mathem. Soc. Vol. V, p. 61 ff., vergl. namentlich § 3.

Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

1. In seiner Abhandlung „Über den *Eisenstein*schen Satz usw." gab Herr *Koenigsberger**) Verallgemeinerungen des *Eisenstein*schen Satzes.**) Diese beziehen sich einerseits auf Gleichungen, deren Koeffizienten eine Variable enthalten, dann aber auch auf Zahlengleichungen. Herr *Hilbert* machte in den „Fortschritten der Mathematik" darauf aufmerksam,***) daß die auf Zahlengleichungen bezüglichen Sätze mittels der Idealtheorie der algebraischen Zahlen leicht beweisbar sind. In dieser Note werde ich zeigen, daß mittels der Idealtheorie der allgemeinen algebraischen Größen, die *Koenigsberger*schen Sätze†) sich *mit einem Schlage* beweisen lassen, wobei es gleichgültig ist, ob die Koeffizienten Zahlen sind oder auch beliebig viele „Unbestimmte" enthalten.

2. Es sei

$$(1.)\qquad f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

*) Dieses Journal Bd. 115, S. 53—78. Berliner Sitzungsberichte 1894. Beschränkt man sich auf algebraische Funktionen einer Variablen, so lassen sich die *Koenigsberger*schen Sätze sehr leicht aus den Sätzen S. 49 u. 50 des *Hensel-Landsberg*schen Werkes (Theorie der algebraischen Funktionen) erschließen.

**) Der betreffende Satz ist eigentlich zum ersten Male von *Schönemann* bewiesen worden. (Dieses Journal Bd. 32.)

***) Jahrgang 1894, S. 142.

†) Sie erfahren bei dieser Behandlungsweise eine Verallgemeinerung und lassen sich in einen Satz zusammenziehen.

eine Gleichung, deren Koeffizienten aus dem holoiden Bereiche*)

$$[(A), x_1, x_2, \ldots x_m]$$

bezw. aus dem holoiden Bereiche $[[1], x_1, x_2, \ldots x_m]$ entstammen. Es sei ferner

$$n = \prod_{s=1}^{r} n_s,$$

wo je zwei der Zahlen n_s relativ prim zu einander sind. (Der Fall $r=1$ sei auch erlaubt.) Es sollen ferner die Größen

$$P_1, P_2, \ldots P_r$$

verschiedene Primgrößen des holoiden Bereiches bezeichnen und das Zeichen $E\left(\frac{a}{b}\right)$ soll die größte in der Zahl $\frac{a}{b}$ enthaltene rationale ganze Zahl bedeuten, endlich sollen die Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$$

positive rationale ganze Zahlen sein. Dann gilt der folgende Satz: *Wenn die Koeffizienten c_i in der Form*

$$(1^*.) \qquad c_i = \prod_{s=1}^{r} P_s^{E\left(\frac{i\alpha_s - 1}{n_s}\right)+1} C_i$$

*darstellbar sind,***) *wo die Größen C_i aus dem ursprünglichen holoiden Bereiche*

---

*) Holoid nennen wir nach Herrn *König* einen Bereich, wenn seine Elemente den Gesetzen der Addition und Multiplikation gehorchen, wenn er eine absolute Einheit 1 besitzt, und wenn in der Reihe $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ nicht die Größe Null vorkommt. Ist jede Größe durch jede von Null verschiedene Größe teilbar, so ist der Bereich „uneigentlich holoid oder orthoid". In unserem Falle sind die Operationsgesetze einfach die Gesetze der gewöhnlichen Buchstabenrechnung. Die Bereiche

$$[(A), x_1, x_2, \ldots x_m], \; [[1], x_1, x_2, \ldots x_m]$$

sind immer eigentlich holoid. Nach der gewöhnlichen Terminologie sind ihre Größen ganze rationale Funktionen der Unbestimmten x_i, deren Koeffizienten Größen des orthoiden Bereiches (A), oder aber rationale ganze Zahlen, d. h. Größen des Bereiches $[1]$ sind.

**) Von Wichtigkeit ist die folgende Bemerkung:

$$E\left(\frac{i\alpha_s - 1}{n_s}\right) = \begin{cases} E\left(\frac{i\alpha_s}{n_s}\right) & \text{im Falle } i\alpha_s \text{ nicht teilbar durch } n_s \\ E\left(\frac{i\alpha_s}{n_s}\right) - 1 & \text{im Falle } i\alpha_s \text{ teilbar durch } n_s. \end{cases}$$

entstammen, wenn ferner im Sinne der Äquivalenz

$$(1^{**}.)\qquad \Big(C_n, \prod_{s=1}^{r} P_r\Big) = 1, \quad (\alpha_s, n_s) = 1$$

ist, dann ist die Gleichung (1.) *irreduzibel.*

3. Dividieren wir (1.) durch $P_s^{\frac{a_s n}{n_s}}$, dann bekommt man:

$$(2.)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{z}{P_s^{\frac{a_s}{n_s}}}\right)^n + c_1\left(\dfrac{1}{P_s}\right)^{\frac{a_s}{n_s}}\left(\dfrac{z}{P_s^{\frac{a_s}{n_s}}}\right)^{n-1} + \cdots \\ \qquad + c_i\left(\dfrac{1}{P_s}\right)^{\frac{ia_s}{n_s}}\left(\dfrac{z}{P_s^{\frac{a_s}{n_s}}}\right)^{n-i} + \cdots + \prod_{j-1}^{s-1} P_j^{\frac{na_j}{n_j}} \prod_{h=s+1}^{r} P_h^{\frac{na_h}{n_h}} C_n = 0. \end{cases}$$

Nun sei w eine Wurzel der Gleichung (1.), die den Gattungsbereich (I') bestimmt. Da die Koeffizienten der Gleichung (2.) nach (1*.) ganze algebraische Größen des ursprünglichen holoiden Bereiches sind und da nach (1**.) der letzte Koeffizient relativ prim zu P_s ist, folgt daraus, daß

$$(3.)\qquad w^{n_s} \text{ teilbar durch } P_s^{a_s}$$

und im Sinne der Äquivalenz

$$(3^*.)\qquad \left(\frac{w^{n_s}}{P_s^{a_s}},\ P_s\right) = 1$$

ist.

4. Es sei jetzt P_s in Primidealfaktoren zerlegt:

$$P_s = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{e_k}$$

und es sei

$$w = \mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{a_k}\mathfrak{Q}, \qquad (\mathfrak{Q}, P_s) = 1$$

dann ist nach (3.) und (3*.):

$$n_s a_g = \alpha_s e_g. \qquad (g=1,2,\ldots k)$$

Da jedoch

$$(\alpha_s, n_s) = 1$$

ist, folgt daraus

$$(4.)\qquad e_g \equiv 0 \pmod{n_s}. \qquad (g=1,2,\ldots k)$$

Infolgedessen ist NmP_s in bezug auf den Gattungsbereich (Γ) mit einer solchen Potenz von P_s äquivalent, deren Exponent durch n_s teilbar ist; und so ist der Grad des Gattungsbereiches ein Vielfaches von n_s, folglich n. d. V. ein solches von n, also gleich n. Q. e. d. Es ist evident, daß die Irreduzibilität der Gleichung bestehen bleibt, wenn der Koeffizient von z^n nicht gleich Eins, sondern relativ prim gegen $\prod_{s=1}^{r} P_s$ ist.

5. Wenn wir den speziellen Fall $r=1$ ins Auge fassen und die Bezeichnungen P bezw. α anwenden, dann ist P im Bereiche (Γ) die n-te Potenz eines Primideals.

Über reelle Äquivalenz von Scharen reeller quadratischer Formen.

Von Herrn *P. Muth* in Osthofen.

Zwei Scharen $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ von reellen quadratischen Formen mit je n Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ will ich *reell äquivalent* nennen, wenn es eine reelle lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante gibt, durch welche gleichzeitig φ in φ' und ψ in ψ' transformiert werden kann. In diesem Falle werde ich auch sagen, daß die Formenpaare φ, ψ und φ', ψ' *reell äquivalent* seien. Nachstehend werden ausschließlich *reelle* quadratische Formen in betracht gezogen.

Damit zwei ordinäre oder singuläre Scharen quadratischer Formen reell äquivalent sind, müssen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Äquivalenz überhaupt erfüllt sein, d. h. die *Weierstraß*schen bezw. die *Weierstraß*schen und *Kronecker*schen Invarianten der beiden Scharen müssen übereinstimmen. Stimmen umgekehrt diese Invarianten für zwei Formenscharen überein, so sind die Scharen zwar äquivalent, aber nur *in speziellen Fällen* auch *reell* äquivalent; solche Fälle werden wir in Artikel I kennen lernen. Es fragt sich daher, welche Bedingungen *im allgemeinen* notwendig und hinreichend dafür sind, daß zwei äquivalente Formenscharen reell äquivalent sind. *Dieses Problem der reellen Äquivalenz wird für ordinäre Scharen von reellen quadratischen Formen in Artikel II—V, VII und IX allgemein gelöst werden.* Die eben genannten Bedingungen sind in gewissen Fällen von besonderer Einfachheit (VIII, IX). Die *numerischen Invarianten* des Problems werden in Artikel VI näher studiert.

Die algebraischen Resultate gestatten wichtige *geometrische Anwendungen,* auf welche in einer Schlußbemerkung wenigstens hingewiesen werden wird.

I. Wie schon erwähnt wurde, sind in besonderen Fällen äquivalente Formenscharen stets auch reell äquivalent. So gilt der Satz:

a) *Besitzen zwei äquivalente ordinäre Scharen von reellen quadratischen Formen lauter imaginäre Elementarteiler, so sind sie reell äquivalent.**)

Die Richtigkeit dieses Satzes ist unmittelbar einleuchtend, wenn man sich die beiden Scharen durch reelle lineare Substitutionen auf ihre reellen *Weierstraß*schen Normalformen transformiert denkt (IV). Ich führe ihn nur des Zusammenhangs wegen an dieser Stelle auf.

Auf einen anderen hierher gehörigen Satz habe ich schon in meinem Buche „Theorie und Anwendung der Elementarteiler"**) (1899), S. 184 aufmerksam gemacht:

b) *Sind in zwei äquivalenten Scharen reeller quadratischer Formen* $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ *und* $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ *die Formen* ψ *und* ψ'***) *definit eines Zeichens, so sind die Scharen reell äquivalent.* —

Dieser Satz bleibt nicht mehr giltig, wenn ψ und ψ' *semidefinite* Formen eines Zeichens sind, wie das einfache Beispiel

$$\lambda_1(x_1^2+x_2^2)+\lambda_2 x_1^2, \qquad \lambda_1(x_1'^2-x_2'^2)+\lambda_2 x_1'^2$$

lehrt. Diese Scharen sind zwar äquivalent ($x_1=x_1'$, $x_2=\sqrt{-1}\,x_2'$), aber nicht reell äquivalent, da $x_1^2+x_2^2$ und $x_1'^2-x_2'^2$ verschiedene Signaturen†) (2 bezw. 0) haben. Es ist aber eine *notwendige Bedingung für die reelle Äquivalenz zweier Scharen,* daß je zwei entsprechende Formen aus ihnen *gleiche Signaturen* haben.

Für semidefinite Formen gilt der Satz:

c) *Sind in zwei ordinären oder singulären äquivalenten Scharen quadratischer Formen* $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ *und* $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ *die Formen* ψ *und* ψ' *semidefinit gleichen Zeichens, so sind die Scharen reell äquivalent, wenn sie keine linearen Elementarteiler mit der Basis* λ_1 *besitzen; andernfalls sind die Scharen dann und nur dann reell äquivalent, wenn die Signaturen von* φ *und* φ' *übereinstimmen.*

---

*) Statt von den Elementarteilern der Determinanten (der Koeffizientensysteme) zweier äquivalenten Formenscharen (welche ja übereinstimmen), spreche ich kurz von den Elementarteilern der beiden Scharen. Auf den Satz a) machte mich Herr *A. Löwy* aufmerksam, ehe ich die Lösung des allgemeinen Problems in Angriff genommen hatte.

**) Zitiert mit E. T.

***) Oder allgemeiner: zwei entsprechende (reelle) Formen definit usw.

†) Über den Begriff „Signatur" vergl. *Frobenius*, Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, Sitzungsber. d. Berl. Akad. (1894), S. 79.

Nach dem in Artikel 94 und 95 meiner E. T. Ausgeführten läßt sich nämlich das Formenpaar φ, ψ gleichzeitig *reell* auf die Gestalt

$$\Phi = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} a_\varrho X_\varrho^2 + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=l} \pm X_\sigma^2 + 2\sum_{\tau=1}^{\tau=m} X_\tau X_{\tau+1},$$
$$\pm \Psi = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} X_\varrho^2 \qquad\qquad + \sum_{\tau=1}^{\tau=m} X_\tau^2$$

transformieren. (Vergl. a. a. O. besonders S. 183 und mein Theorem 38, S. 184; lies in diesem ausführlicher statt „sind mit" „sind alle reell und mit".) Die Konstanten a_ϱ sind reell, $k+m$ ist der Rang von ψ. Die Normalformen Φ', $\pm\Psi'$ von φ' und ψ' erhält man aus vorstehenden, indem man a'_ϱ für a_ϱ $(\varrho=1, 2, \dots k)$ setzt und neue Variablen $X'_\varkappa$ für die $X_\varkappa$ einführt; vor Ψ und Ψ' stehen gleiche Vorzeichen. Wegen der Übereinstimmung der Elementarteiler der betrachteten Scharen müssen die a_ϱ und a'_ϱ — von der Reihenfolge abgesehen — übereinstimmen. Wir dürfen daher geradezu $a_\varrho = a'_\varrho$ annehmen; fehlen nun die Elementarteiler von der Gestalt λ_1, so fehlen in Φ und Φ' die zweiten Summen, und Φ geht in Φ', $\pm\Psi$ in $\pm\Psi'$ durch die Substitution $X_\varkappa = X'_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \dots n)$ über; damit ist der erste Teil von c) bewiesen. Treten aber l Elementarteiler $\lambda_1, \lambda_1, \dots \lambda_1$ auf, so haben wir $S(\varphi) = S(\varphi')$ vorauszusetzen, wenn allgemein $S(\varphi)$ die Signatur einer quadratischen Form φ bedeutet. Es ist dann auch $S(\Phi) = S(\Phi')$, und somit, da die Signatur einer zerlegbaren Form gleich der Summe der Signaturen ihrer Teile ist,

$$S\Big(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=l} \pm X_\sigma^2\Big) = S\Big(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=l} \pm X_\sigma'^2\Big),$$

weil $a_\varrho = a'_\varrho$ ist und die Signaturen der letzten Summen in Φ und Φ' Null sind. Mithin treten ebensoviele positive (negative) Quadrate X_σ^2 auf als positive (negative) Quadrate $X_\sigma'^2$, man kann die Variablen $X_\sigma'^2$ so umbezeichnen, daß vor X_σ^2 und $X_\sigma'^2$ $(\sigma = 1, 2, \dots l)$ gleiche Vorzeichen stehen, woraus die reelle Äquivalenz der Paare φ, ψ und φ', ψ' unmittelbar folgt.

II. Wie schon hervorgehoben wurde, ist es notwendig für die reelle Äquivalenz zweier Scharen $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$, daß für beliebige (reelle) Werte von $\lambda_1 | \lambda_2$ die Gleichung

$$S(\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi) = S(\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi') \tag{1.}$$

besteht. Wir werden in Artikel VIII Fälle kennen lernen, wo aus dem

Bestehen einer *endlichen Anzahl* von Gleichungen (1.) die reelle Äquivalenz zweier äquivalenten Scharen $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$, $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ und damit *die unbeschränkte Giltigkeit* der Gleichung (1.) folgt (vergl. auch Satz *c*) oben).

Es kann aber auch eintreten, daß für zwei äquivalente Scharen die Bedingung (1.) für beliebige $\lambda_1:\lambda_2$ erfüllt ist, *ohne daß die Scharen reell äquivalent sind.* Z. B. ist bei

$$\varphi=x_1^2-2x_2x_4-x_3^2,\qquad \varphi'=-x_1'^2+2x_2'x_4'+x_3'^2$$
$$\psi=x_1^2-2x_2x_4-x_3^2-2x_2x_3,\quad \psi'=-x_1'^2+2x_2'x_4'+x_3'^2+2x_2'x_3'$$

$S(\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi)=S(\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi')=0$ für alle $\lambda_1:\lambda_2$; diese beiden Scharen $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ sind zwar äquivalent ($x_i=\sqrt{-1}\,x_i'$, $i=1,2,3,4$), aber *nicht reell äquivalent,* wie aus dem Theorem *g*) in Artikel VI *ohne weiteres* hervorgeht.

III. Wir müssen also *nach weiteren notwendigen Bedingungen* für die reelle Äquivalenz zweier Formenscharen suchen. Greifen wir aus der Schar $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ zwei beliebige Formen φ_1 und ψ_1 heraus, bezeichnen die entsprechenden Formen der Schar $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ mit φ_1' und ψ_1' und bilden die adjungierte Form von $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\psi_1$ mittels neuer Variablen $u_1,u_2,\dots u_n$:

$$\lambda_1^{n-1}\Phi_{n-1}+\lambda_1^{n-2}\lambda_2\Phi_{n-2}+\cdots+\lambda_2^{n-1}\Phi_0,$$

ferner die adjungierte Form von $\lambda_1\varphi_1'+\lambda_2\psi_1$ mittels neuer Variablen $u_1',u_2',\dots u_n'$:

$$\lambda_1^{n-1}\Phi_{n-1}'+\lambda_1^{n-2}\lambda_2\Phi_{n-2}'+\cdots+\lambda_2^{n-1}\Phi_0',$$

so sind die quadratischen Formen Φ_i und Φ_i' ($i=0,\dots n-1$) *simultane Kontravarianten* der Formenpaare φ_1,ψ_1 bezw. φ_1',ψ_1'. Sind nun die Formenpaare φ,ψ und φ',ψ' reell äquivalent, so gibt es eine reelle lineare Substitution T, welche gleichzeitig φ_1 in φ_1' und ψ_1 in ψ_1', also auch eine solche, welche Φ_i' in $|T|^2\Phi_i$ überführt, wenn $|T|$ die Determinante von T bedeutet. Daher hat man die *weiteren notwendigen Bedingungen*

$$\text{(2.)}\qquad S(\Phi_i)=S(\Phi_i')\qquad {\scriptstyle (i=0,1,\dots n-1)}$$

für die reelle Äquivalenz der Scharen $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$.

Es wird im folgenden gezeigt werden, daß zwei äquivalente reelle ordinäre Scharen reell äquivalent sind, wenn eine *endliche Anzahl* Bedingungen von der Gestalt (1.) und (2.) erfüllt ist; *damit ist das Problem der reellen Äquivalenz für ordinäre Scharen*) gelöst.* Daß die Bedingungen von der

*) Von nun an werden nur noch ordinäre Scharen in betracht gezogen.

Gestalt (2.) *teilweise* und in besonderen Fällen *ganz* durch einfachere von der Gestalt (1.) ersetzt werden können, wird in den Artikeln VII—IX dargetan werden.

IV. Ehe ich das allgemeine Problem in Angriff nehme, will ich einige Formeln und Tatsachen zusammenstellen, die bei seiner Lösung ständig gebraucht werden. Es sei φ eine ordinäre, ψ eine beliebige reelle quadratische Form von je n Variablen, die Determinante $|\lambda\varphi-\psi|$ von $\lambda\varphi-\psi$ besitze die reellen Elementarteiler

$$(\lambda-c_1)^{e_1},\ (\lambda-c_2)^{e_2}, \ldots (\lambda-c_k)^{e_k}$$

und die imaginären Elementarteiler

$$(\lambda-c_{k+1})^{e_{k+1}},\ (\lambda-c_{k+2})^{e_{k+2}}, \ldots (\lambda-c_l)^{e_l};$$

$l-k$ ist eine gerade Zahl und

$$e_1+e_2+\cdots+e_l=n.$$

Ist $(\lambda-c_\sigma)^{e_\sigma}$ ein imaginärer Elementarteiler, also etwa $c_\sigma=m_\sigma+\sqrt{-1}\,m'_\sigma$, so tritt stets ein konjugiert imaginärer Elementarteiler $(\lambda-c'_\sigma)^{e_\sigma}$, wo $c'_\sigma=m_\sigma-\sqrt{-1}\,m'_\sigma$, auf. Setzen wir mit *Weierstraß* noch

$$X_{\sigma 0}Y_{\sigma,e_\sigma-1}+X_{\sigma 1}Y_{\sigma,e_\sigma-2}+\cdots+X_{\sigma,e_\sigma-1}Y_{\sigma 0}=(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma},$$

so kann man durch eine reelle lineare Substitution φ und ψ gleichzeitig bezw. in

$$(3.)\quad \begin{cases} \Phi=\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=k}\varepsilon_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}+2\sum\limits_{\sigma=k+1}^{\sigma=\frac{l-k}{2}+k}[(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}-(X'_\sigma X'_\sigma)_{e_\sigma}], \\ \Psi=\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=k}[\varepsilon_\sigma c_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}+\varepsilon_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma-1}] \\ \qquad +2\sum\limits_{\sigma=k+1}^{\sigma=\frac{l-k}{2}+k}[m_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}-m_\sigma(X'_\sigma X'_\sigma)_{e_\sigma}-2m'_\sigma(X_\sigma X'_\sigma)_{e_\sigma} \\ \qquad\qquad +(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma-1}-(X'_\sigma X'_\sigma)_{e_\sigma-1}] \end{cases}$$

transformieren, wo $\varepsilon_\sigma=\pm 1$ ist und Φ, Ψ von je n neuen Variablen $X_{\sigma\mu}$, $X'_{\sigma\mu}$ abhängen.*) Ich werde die Formen Φ und Ψ, die, abgesehen von den noch

*) Man vergl. am einfachsten: *A. Loewy*, „Über Scharen reeller quadratischer und *Hermite*scher Formen". Dieses Journal (1900) Bd. 122, S. 56 und 57. Diese schöne und inhaltreiche Arbeit wird im folgenden mit L. zitiert werden.

unbestimmten ε_σ, durch die Elementarteiler von $|\lambda\varphi-\psi|$ vollständig bestimmt sind, die *reellen Weierstraßschen Normalformen* von φ und ψ nennen. Jedem reellen Elementarteiler $(\lambda-c_\sigma)^{e_\sigma}$ entspricht in (3.) ein ε_σ; die in (3.) an zweiter Stelle stehenden Summen gehören zu den imaginären Elementarteilern von $|\lambda\varphi-\psi|$. Bezeichnet man letztere mit U und V, so ist $\lambda_1 U+\lambda_2 V$ eine Schar, deren Determinante lauter imaginäre Elementarteiler besitzt. Für *jede* solche Schar gilt die Gleichung

$$(4.)\qquad S(\lambda_1 U+\lambda_2 V)=0$$

für alle reellen $\lambda_1|\lambda_2$ (L. S. 55, Ungleichung). Es ist ferner (L. S. 58 u. 59)

$$(5.)\qquad S[\varepsilon_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}]=\begin{cases}\varepsilon_\sigma & \text{bei ungeradem } e_\sigma\\ 0 & \text{bei geradem } e_\sigma\end{cases},$$

weiter für ein *gerades* e_σ

$$(6.)\qquad S[\varepsilon_\sigma c_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}+\varepsilon_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma-1}]=\begin{cases}0 & \text{bei } c_\sigma\neq 0\\ \varepsilon_\sigma & \text{bei } c_\sigma=0\end{cases}$$

und endlich bei *ungeradem* e_σ

$$(7.)\qquad S[\varepsilon_\sigma c_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}+\varepsilon_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma-1}]=\varepsilon_\sigma\,\text{sign.}\,c_\sigma,$$

wo sign. $c_\sigma=+1,\,-1,\,0$ zu setzen ist, je nachdem c_σ positiv, negativ oder Null ist.

V. Nunmehr betrachten wir zwei äquivalente Formenpaare φ,ψ und φ',ψ'; die Determinante $|\varphi|$ ($|\varphi'|$) sei nicht Null, die reellen Elementarteiler der Scharen seien wie in IV

$$(\lambda-c_\sigma)^{e_\sigma}.\qquad {\scriptstyle(\sigma=1,2,\dots k)}$$

Treten ϱ Elementarteiler mit der Basis $\lambda-c_1$ auf, so dürfen wir annehmen, daß $c_1=c_2=\dots=c_\varrho$ ist; ferner können wir

$$(8.)\quad\begin{cases}e_1=e_2=\dots=e_\alpha>e_{\alpha+1}=e_{\alpha+2}=\dots=e_{\alpha+\beta}>e_{\alpha+\beta+1}=e_{\alpha+\beta+2}=\dots=e_{\alpha+\beta+\gamma}\\ \qquad >e_{\alpha+\beta+\gamma+1}=\dots>\dots>e_{\alpha+\beta+\gamma+\dots+\omega+1}=\dots=e\end{cases}$$

voraussetzen, sodaß, wenn zur Abkürzung

$$(9.)\qquad e_1+e_2+\dots+e_\varrho-e_\sigma=\eta_\sigma\qquad {\scriptstyle(\sigma=1,2,\dots\varrho)}$$

gesetzt wird,

$$(10.)\quad\begin{cases}\eta_1=\eta_2=\dots=\eta_\alpha<\eta_{\alpha+1}=\dots=\eta_{\alpha+\beta}<\eta_{\alpha+\beta+1}=\dots<\dots\\ \qquad <\eta_{\alpha+\beta+\gamma+\dots+\omega+1}=\dots=\eta_\varrho\end{cases}$$

wird. Die imaginären Elementarteiler von $|\lambda\varphi-\psi|$ seien ebenfalls gleich denen von $|\lambda\varphi-\psi|$ in IV.

Notwendige Bedingung für die reelle Äquivalenz der betrachteten Paare ist (II.)

$$S(\varphi)=S(\varphi'). \tag{11.}$$

Setzen wir ferner

$$\psi-c_1\varphi=\chi_1, \qquad \psi'-c_1\varphi'=\chi_1'$$

und bilden die adjungierten Formen von $\lambda\varphi-\chi_1$ und $\lambda\varphi'-\chi_1'$:

$$\lambda^{n-1}\Phi_{n-1}-\lambda^{n-2}\Phi_{n-2}+\cdots\pm\Phi_0,$$
$$\lambda^{n-1}\Phi'_{n-1}-\lambda^{n-2}\Phi'_{n-2}+\cdots\pm\Phi'_0,$$

so sind weitere notwendige Bedingungen durch die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} S(\Phi_{\eta_1})=S(\Phi'_{\eta_1}),\ S(\Phi_{\eta_{\alpha+1}})=S(\Phi'_{\eta_{\alpha+1}}),\ S(\Phi_{\eta_{\alpha+\beta+1}})=S(\Phi'_{\eta_{\alpha+\beta+1}}), \\ \qquad\qquad \ldots S(\Phi_{\eta_\varrho})=S(\Phi'_{\eta_\varrho}) \end{cases}$$

gegeben (III.). Die Gesamtheit der Bedingungen (12.) wollen wir mit C_1 bezeichnen. Wir setzen voraus, daß die Bedingungen (11.) und (12.) erfüllt sind.

Jetzt denken wir uns φ und ψ gleichzeitig reell auf die Normalformen Φ und Ψ in (3.) transformiert; die Normalformen Φ' und Ψ' von φ' und ψ' gehen aus diesen hervor, wenn man an Stelle der Variablen $X_{\sigma\mu}$, $X'_{\sigma\mu}$ Variablen $\Xi_{\sigma\mu}$, $\Xi'_{\sigma\mu}$, an Stelle der ε_σ die positiven oder negativen Einheiten ε'_σ treten läßt.

Wegen (11.) ist $S(\Phi)=S(\Phi')$; mithin sind, da Φ und Φ' zerlegbare Formen sind, nach I. und (4.), (5.) in IV. die Summen aller ε_σ und ε'_σ, welche den reellen Elementarteilern mit ungeraden Exponenten in Φ und Φ' entsprechen, gleich. Daraus folgt aber die Übereinstimmung der Produkte π und π' der eben genannten ε_σ und ε'_σ, also

$$\pi=\pi'. \tag{13.}$$

Bilden wir weiter, indem wir

$$\Psi-c_1\Phi=X_1, \quad \Psi'-c_1\Phi'=X_1'$$

setzen, die den Kontravarianten Φ_σ und Φ'_σ analogen $\overline{\Phi}_\sigma$ und $\overline{\Phi}'_\sigma$ mittels Φ und X_1, Φ' und X_1', so ist wegen (12.) nach III.

$$S(\overline{\Phi}_{\eta_1})=S(\overline{\Phi}'_{\eta_1}),\ S(\overline{\Phi}_{\eta_{\alpha+1}})=S(\overline{\Phi}'_{\eta_{\alpha+1}}),\ldots S(\overline{\Phi}_{\eta_\varrho})=S(\overline{\Phi}'_{\eta_\varrho}). \tag{14.}$$

Nun ist aber

$$X_1 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\varrho} \varepsilon_\sigma (X_{\sigma 0} X_{\sigma, e_\sigma - 2} + X_{\sigma 1} X_{\sigma, e_\sigma - 3} + \cdots + X_{\sigma, e_\sigma - 2} X_{\sigma 0}) + R,$$

wo R eine quadratische Form vorstellt, die mit dem übrigen Teile von X_1 keine Variable gemein hat. Ferner hat man

$$|\lambda \Phi - X_1| = \pi \lambda^{e_1 + e_2 + \cdots + e_\varrho} \vartheta(\lambda) = \pi \lambda^E \vartheta(\lambda),$$

wo

$$(15.) \qquad e_1 + e_2 + \cdots + e_\varrho = E$$

gesetzt wurde und $\vartheta(\lambda)$ eine reelle ganze Funktion von λ bedeutet, die für $\lambda = 0$ gleich einer *von Null verschiedenen Konstanten* wird, die wir mit K bezeichnen wollen. Die Koeffizienten in $\vartheta(\lambda)$ sind von den ε_σ *unabhängig*.

Analog ist für

$$X_1' = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\varrho} \varepsilon_\sigma' (\Xi_{\sigma 0} \Xi_{\sigma, e_\sigma - 2} + \cdots + \Xi_{\sigma, e_\sigma - 2} \Xi_{\sigma 0}) + R':$$

$$|\lambda \Phi' - X_1'| = \pi' \lambda^E \vartheta(\lambda),$$

da Φ in Φ', X_1 in X_1' dadurch übergeht, daß man $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\sigma'$, $X_{\sigma\mu} = \Xi_{\sigma\mu}$ usw. setzt.

Um jetzt die adjungierte Form $\Omega(\Omega')$ von $\lambda \Phi - X_1 (\lambda \Phi' - X_1')$ wirklich zu bilden, benutze ich einen Satz des Herrn *Frobenius* (dieses Journal (1878), Bd. 84, S. 19), welcher besagt, daß die reziproke Form einer zerlegbaren bilinearen Form gleich der Summe der reziproken Formen ihrer Teile ist. Durch Übergang von symmetrischen bilinearen Formen zu quadratischen Formen ergibt sich daraus, daß für eine zerlegbare quadratische Form

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_h$$

die Identität

$$\frac{adj.(A)}{|A|} = \frac{adj.(A_1)}{|A_1|} + \frac{adj.(A_2)}{|A_2|} + \cdots + \frac{adj.(A_h)}{|A_h|}$$

besteht. Die adjungierte Form von

$$\lambda \varepsilon_\sigma (X_{\sigma 0} X_{\sigma, e_\sigma - 1} + X_{\sigma 1} X_{\sigma, e_\sigma - 2} + \cdots + X_{\sigma, e_\sigma - 1} X_{\sigma 0})$$
$$- \varepsilon_\sigma (X_{\sigma 0} X_{\sigma, e_\sigma - 2} + X_{\sigma 1} X_{\sigma, e_\sigma - 3} + \cdots + X_{\sigma, e_\sigma - 2} X_{\sigma 0}),$$

dividiert durch die Determinante dieser Form, bildet man am einfachsten mit Benutzung der Entwicklungen S. 284 und S. 288 meiner Arbeit in diesem

Journal (1903), Bd. 125; man erhält, indem man noch neue Variablen $u_{\sigma\mu}$ einführt, zunächst

$$\frac{\Omega}{\pi\lambda^E\vartheta(\lambda)} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\varrho} \frac{\varepsilon_\sigma}{\lambda^{e_\sigma}} \Big[\lambda^{e_\sigma-1}(u_{\sigma 0}u_{\sigma,e_\sigma-1} + u_{\sigma 1}u_{\sigma,e_\sigma-2} + \cdots + u_{\sigma,e_\sigma-1}u_{\sigma 0})$$
$$+ \lambda^{e_\sigma-2}(u_{\sigma 1}u_{\sigma,e_\sigma-1} + u_{\sigma 2}u_{\sigma,e_\sigma-2} + \cdots + u_{\sigma,e_\sigma-1}u_{\sigma 1}) + \cdots + u^2_{\sigma,e_\sigma-1}\Big] \pm \frac{\Omega_1}{\vartheta(\lambda)},$$

wo Ω_1 die adjungierte Form des Teiles von $\lambda\Phi - X_1$ vorstellt, welcher von den in R auftretenden Variablen abhängt.

Man hat daher endlich mit Rücksicht auf (9.)

$$(16.)\quad \begin{cases} \Omega = \pi\vartheta(\lambda)\big[\varepsilon_1\lambda^{\eta_1}\{\lambda^{e_1-1}(u_{10}u_{1,e_1-1} + u_{11}u_{1,e_1-2} + \cdots + u_{1,e_1-1}u_{10}) \\ \qquad + \lambda^{e_1-2}(u_{11}u_{1,e_1-1} + u_{12,e_1-2} + \cdots + u_{1,e_1-1}u_{11}) + \cdots + u^2_{1,e_1-1}\} \\ \qquad + \varepsilon_2\lambda^{\eta_2}\{\lambda^{e_2-1}(u_{20}u_{2,e_2-1} + u_{21}u_{2,e_2-2} + \cdots + u_{2,e_2-1}u_{20}) \\ \qquad + \lambda^{e_2-2}(u_{21}u_{2,e_2-1} + u_{22}u_{2,e_2-2} + \cdots + u_{2,e_2-1}u_{21}) + \cdots + u^2_{2,e_2-1}\} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \qquad + \varepsilon_\varrho\lambda^{\eta_\varrho}\{\lambda^{e_\varrho-1}(u_{\varrho 0}u_{\varrho,e_\varrho-1} + u_{\varrho 1}u_{\varrho,e_\varrho-2} + \cdots + u_{\varrho,e_\varrho-1}u_{\varrho 0}) \\ \qquad\quad + \lambda^{e_\varrho-2}(u_{\varrho 1}u_{\varrho,e_\varrho-1} + u_{\varrho 2,e_\varrho-2} + \cdots + u_{\varrho,e_\varrho-1}u_{\varrho 1}) + \cdots \\ \qquad\qquad + u^2_{\varrho,e_\varrho-1}\}\big] \pm \pi\lambda^E\Omega_1. \end{cases}$$

Hieraus erhält man Ω', indem man $\varepsilon_\sigma = \varepsilon'_\sigma (\sigma = 1, 2, \ldots k)$, $\pi = \pi'$ und für $u_{\sigma\mu}$ neue Variablen $u'_{\sigma\mu}$ setzt. Mit Rücksicht auf (10.) ist daher

$$(17.)\qquad \overline{\Phi}_{\eta_1} = \pi K[\varepsilon_1 u^2_{1,e_1-1} + \varepsilon_2 u^2_{2,e_2-1} + \cdots + \varepsilon_a u^2_{a,e_a-1}],$$

$$(18.)\qquad \overline{\Phi}'_{\eta_1} = \pi' K[\varepsilon'_1 u'^2_{1,e_1-1} + \varepsilon'_2 u'^2_{2,e_2-1} + \cdots + \varepsilon'_a u'^2_{a,e_a-1}]$$

und somit wegen der ersten Gleichung in (14.)

$$(19.)\qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_a = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \cdots + \varepsilon'_a.$$

Weiter ist wegen (10.)

$$(20.)\quad \begin{cases} \overline{\Phi}_{\eta_{a+1}} = \pi[\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 + \cdots + \varepsilon_a\varphi_a] \\ \qquad + \pi K[\varepsilon_{a+1}u^2_{a+1,e_{a+1}-1} + \cdots + \varepsilon_{a+\beta}u^2_{a+\beta,e_{a+\beta}-1}], \\ \overline{\Phi}'_{\eta_{a+1}} = \pi'[\varepsilon_1\varphi'_1 + \varepsilon'_2\varphi_2 + \cdots + \varepsilon'_a\varphi_a] \\ \qquad + \pi' K[\varepsilon'_{a+1}u'^2_{a+1,e_{a+1}-1} + \cdots + \varepsilon'_{a+\beta}u'^2_{a+\beta,e_{a+\beta}-1}], \end{cases}$$

wo sowohl die quadratischen Formen φ_i als φ'_i unter sich keine Variablen

gemein haben und sämtliche φ_i und φ'_i *dieselben Funktionen* der in ihnen auftretenden Variablen sind, sodaß

$$(21.)\quad S(\varphi_1)=S(\varphi_2)=\cdots=S(\varphi_a)=S(\varphi'_1)=S(\varphi'_2)=\cdots=S(\varphi'_a)$$

ist. Daher hat man

$$(22.)\quad \begin{cases} S(\overline{\Phi}_{\eta_{a+1}})=\pi S(\varphi_1)[\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_a] \\ \qquad\qquad +\pi\,\mathrm{sign.}\,K[\varepsilon_{a+1}+\varepsilon_{a+2}+\cdots+\varepsilon_{a+\beta}], \\ S(\overline{\Phi}'_{\eta_{a+1}})=\pi' S(\varphi'_1)[\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\cdots+\varepsilon'_a] \\ \qquad\qquad +\pi'\,\mathrm{sign.}\,K(\varepsilon'_{a+1}+\varepsilon'_{a+2}+\cdots+\varepsilon'_{a+\beta}] \end{cases}$$

und somit wegen (14.) mit Rücksicht auf (13.), (19.) und (21.)

$$\varepsilon_{a+1}+\varepsilon_{a+2}+\cdots+\varepsilon_{a+\beta}=\varepsilon'_{a+1}+\varepsilon'_{a+2}+\cdots+\varepsilon'_{a+\beta}.$$

Indem man in dieser Weise weiter schließt, erkennt man, daß wegen (14.) auch

$$\begin{aligned} \varepsilon_{a+\beta+1}+\varepsilon_{a+\beta+2}+\cdots+\varepsilon_{a+\beta+\gamma} &= \varepsilon'_{a+\beta+1}+\varepsilon'_{a+\beta+2}+\cdots+\varepsilon'_{a+\beta+\gamma}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{a+\beta+\gamma+\cdots+\omega+1}+\cdots+\varepsilon_\varrho &= \varepsilon'_{a+\beta+\gamma+\cdots+\omega+1}+\cdots+\varepsilon'_\varrho \end{aligned}$$

sein muß, daß heißt:

Unter den Voraussetzungen (11.) *und* (12.) *stimmen die Summen der* ε_σ *und* ε'_σ, *welche in den reellen Weierstraßschen Normalformen von* φ, ψ *und* φ', ψ' *zu gleichen Elementarteilern mit der Basis* $\lambda-c_1$ *gehören, überein.*

Nun war aber $\lambda-c_1$ *irgend einer* der verschiedenen reellen Linearfaktoren von $|\lambda\varphi-\psi|$; stellen wir daher mit den m verschiedenen Linearfaktoren von $|\lambda\varphi-\psi|$ die für die reelle Äquivalenz der betrachteten Paare notwendigen Bedingungen nach Analogie von (12.) auf, und bezeichnen diese bezw. mit $C_1, C_2, \ldots C_m$, so haben wir das Ergebnis, daß unter den Voraussetzungen

$$S(\varphi)=S(\varphi'),\quad C_1,\ldots C_m$$

die Summen s_σ und s'_σ der μ Zahlen ε_n bezw. ε'_σ, welche einem μ-mal auftretenden Elementarteiler $(\lambda-c_\sigma)^{e_\sigma}$ der äquivalenten Paare φ, ψ und φ', ψ' in den Normalformen Φ, Ψ bezw. Φ', Ψ' entsprechen,*) übereinstimmen. Wir können in Φ' und Ψ' daher die Variablen so anordnen, daß geradezu

$$\varepsilon_\sigma=\varepsilon'_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\ldots k)$$

wird. Somit ist das Theorem bewiesen:

*) Für $c_\sigma=c_\tau$, $e_\sigma=e_\tau$ ist natürlich $s_\sigma=s_\tau$ zu nehmen.

d) *Die Bedingungen*

$$S(\varphi)=S(\varphi'),\ C_1, C_2, \dots C_m$$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß die äquivalenten reellen ordinären Formenscharen $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ *und* $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ *reell äquivalent sind. Haben alle reellen Elementarteiler der beiden Scharen gerade Exponenten, so ist die Bedingung* $S(\varphi)=S(\varphi')$ *überflüssig, treten auch reelle Elementarteiler mit ungeraden Exponenten auf, so kann von den Bedingungen* $C_1, C_2, \dots C_m$ *eine als überflüssig wegbleiben.*

Das zuletzt Gesagte ergibt sich daraus, *daß* $S(\varphi)=S(\varphi')=0$ *ist, wenn alle reellen Elementarteiler gerade Exponenten haben* (IV, (4.) und (5.) oder L. S. 55, Ungleichung. In diesem Falle hat man in vorstehenden Entwicklungen natürlich $\pi=\pi'=1$ zu setzen). Gehören aber zu einer gewissen Basis, z. B. zu $\lambda-c_1$ auch Elementarteiler mit ungeraden Exponenten, und ist unter der Voraussetzung (8.) für die Exponenten dieser Basis die zuletzt auftretende ungerade Zahl der Reihe $e_1, e_2, \dots e_\varrho$ gleich $e_\mu=e_{\mu+1}=\cdots$, so kann, wenn die Bedingungen $C_2, \dots C_m$ erfüllt sind, wegen $S(\varphi)=S(\varphi')$ von den Bedingungen C_1 die Bedingung

$$S(\Phi_{\eta_\mu})=S(\Phi'_{\eta_\mu})$$

als überflüssig wegbleiben.

Wir können sonach den Satz aussprechen, der auch für

$$|\varphi|=0,\ |\psi|=0,\ |\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi|\neq 0$$

giltig bleibt (IX.):

e) Die Anzahl der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die reelle Äquivalenz zweier äquivalenten ordinären Scharen von reellen quadratischen Formen ist im allgemeinen gleich der Anzahl der verschiedenen reellen Elementarteiler ihrer Determinanten.

VI. Wie aus IV hervorgeht, kann man — und zwar auf unendlich viele Arten — die Formen φ und ψ durch reelle lineare Substitutionen gleichzeitig auf die Gestalt

$$(3^a.)\quad \begin{cases} \Phi=\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=k}\varepsilon_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} \qquad\qquad\qquad\qquad +J_1=S_1+J_1,\\ \Psi=\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=k}[\varepsilon_\sigma c_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma}+\varepsilon_\sigma(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma-1}]+J_2=S_2+J_2\end{cases}$$

bringen, wo J_1 und J_2 reelle quadratische Formen von $\frac{l-k}{2}+k$ Variablen

bedeuten, welche von den in S_1 und S_2 auftretenden verschieden sind. Die Elementarteiler von $|\lambda J_1 - J_2|$ sind die imaginären Elementarteiler von $|\lambda\varphi - \psi|$.

Analog kann man oben etwas allgemeinere Normalformen Φ', Ψ' von φ' und ψ' einführen. Alsdann kann man in vorstehenden Entwicklungen *diese Formen* Φ, Ψ und Φ', Ψ' an die Stelle der oben gleichbezeichneten Formen treten lassen, da es ersichtlich auf die Gestalt der den imaginären Elementarteilern der äquivalenten Scharen entsprechenden Teilformen in Φ, Ψ, Φ' und Ψ' absolut nicht ankommt; es ergibt sich dann, genau wie früher, die Übereinstimmung der Zahlen s_σ und s'_σ und hieraus wegen des Satzes a) die Giltigkeit des Satzes d).

Die Zahlen s_σ sind *numerische Invarianten des Formenpaares* φ, ψ bei reeller Transformation der Variablen; sie stehen mit der *numerischen Invariante* $S(\varphi)$ und den numerischen Invarianten auf den linken Seiten der Bedingungsgleichungen $C_1, C_2, \dots C_m$, welche wir mit $S(\Phi_\sigma^{(\varkappa)})$ bezeichnen wollen, in *rationalem Zusammenhang*. Es ist nämlich zunächst $\pi = \frac{1}{\pi}$ eine ganze Funktion von $S(\varphi)$, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind. Daher sind die Invarianten $S(\Phi_\sigma^{(\varkappa)})$ ganze Funktionen der Invarianten s_σ mit rationalen*) Koeffizienten (vergl. die Gleichungen (17.), (22.), ...), da auch $S(\varphi)$ eine ganze ganzzahlige Funktion der s_σ ist. Aus eben diesen Gleichungen folgt aber auch, daß die Summen s_σ ganze Funktionen der Invarianten $S(\varphi)$, $S(\Phi_\sigma^{(\varkappa)})$ mit rationalen*) Koeffizienten sind. Auch auf diesem Wege erkennt man die Richtigkeit des Satzes d).

Die Zahlen s_σ sind durch die Koeffizienten der beiden quadratischen Formen φ und ψ vollständig bestimmt, wie wir eben sahen. Daher gilt der Satz:

f) *Wie man auch immer die reellen quadratischen Formen φ und ψ durch reelle lineare Substitution auf die Gestalt* (3ᵃ.) *bringt, die Zahlen s_σ — in einer bestimmten Reihenfolge genommen — werden stets dieselben sein.*

Dieser Satz, der m. m. auch richtig bleibt, wenn

$$|\varphi| = 0, \ |\psi| = 0, \quad \text{aber} \quad |\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi| \neq 0$$

ist (IX.), über *Paare reeller quadratischer Formen* zeigt eine gewisse *Analogie zum Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.*

---

*) Besitzen alle reellen Elementarteiler gerade Exponenten, so sind die Koeffizienten ganze Zahlen, weil alsdann $\pi = 1$ zu nehmen ist (siehe oben).

Es hat sich endlich der Satz ergeben:

g) *Zwei äquivalente Paare φ, ψ und φ', ψ' von reellen quadratischen Formen sind dann und nur dann reell äquivalent, wenn die Invarianten s_ϱ von φ und ψ mit den entsprechenden Invarianten von φ' und ψ' bezw. übereinstimmen.*

Auch dieser Satz gilt m. m. für beliebige ordinäre Formenpaare (IX.). Liegen zwei äquivalente Paare reeller quadratischer Formen in den Normalformen (3ª.) vor, so kann man auf Grund dieses Satzes *g) ohne weiteres* entscheiden, ob sie reell äquivalent sind oder nicht. Vergleiche das Beispiel in Art. II.

VII. Im vorletzten Artikel haben wir ein System von charakteristischen Bedingungen für die reelle Äquivalenz zweier äquivalenten Formenscharen kennen gelernt. Dieses läßt sich *stets* durch ein gleichartiges ersetzen, derart, daß an Stelle *gewisser* Bedingungen aus $C_1, \dots C_m$ Bedingungen von der Gestalt

$$S(\chi_i) = S(\chi_i')$$

treten, wo χ_i und χ_i' *entsprechende reelle singuläre Formen* aus den Scharen $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$ vorstellen.

Die Elementarteiler der äquivalenten Scharen $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$ seien dieselben, wie in IV. und V., und es gelte auch hier das über die Transformation von φ, ψ bezw. φ', ψ' auf die reellen Normalformen Φ, Ψ und Φ', Ψ' Gesagte. Wir denken uns aber jetzt in den Normalformen Φ, Ψ diejenigen c_σ, die *gleich* sind, auch mit *gleichen* Buchstaben bezeichnet, so daß nun, wenn die Gleichung $|\lambda\varphi - \psi| = 0$ m verschiedene reelle Wurzeln besitzt, nur m Konstanten c_σ in Ψ auftreten. Diese können wir wieder mit $c_1, c_2, \dots c_m$ bezeichnen und dürfen voraussetzen, daß

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{\tau-1} < c_\tau < c_{\tau-1} < \cdots < c_m$$

sei. Analoges gelte von Ψ'. Die Summe aller ε_σ [ε_σ'], welche in diesen Normalformen Φ, Ψ [Φ', Ψ'] den Elementarteilern mit der Basis $\lambda - c_i$ und ungeraden (geraden) Exponenten zugeordnet sind, bezeichnen wir mit u_i (g_i) [u_i' (g_i')].

Ist die für die reelle Äquivalenz der betrachteten Paare notwendige Bedingung $S(\varphi) = S(\varphi')$ erfüllt, so hat man wegen (4.) und (5.) in IV.

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = u_1' + u_2' + \cdots + u_m'; \tag{23.}$$

setzen wir die weitere notwendige Realitätsbedingung

$$S(\psi-c_1\varphi)=S(\psi'-c_1\varphi')$$

als erfüllt voraus, so ist nach (4.), (6.) und (7.) in IV.

$$(24.)\qquad u_2+u_3+\cdots+u_m+g_1=u'_2+u'_3+\cdots+u'_m+g'_1.$$

Jetzt denken wir uns auf Grund der Entwicklungen des vorigen Artikels die zur Wurzel c_1 gehörigen γ_1 Bedingungen C_1 für die reelle Äquivalenz der Paare φ, ψ und φ', ψ' aufgestellt und zwar in der durch die Größe der Elementarteilerexponenten, die zur Basis $\lambda-c_1$ gehören, bedingten Reihenfolge (siehe Gleichung (8.) und (12.) in V.). Sind von diesen γ_1 Bedingungen C_1 die γ_1-1 ersten erfüllt, so wird nach Artikel V. entweder $u_1=u'_1$ und somit wegen (23.) und (24.) $g_1=g'_1$, oder es wird $g_1=g'_1$ und dann wegen (23.) und (24.) $u_1=u'_1$, je nachdem der Exponent des einmal oder mehreremal auftretenden Elementarteilers niedrigsten Grades mit der Basis $\lambda-c_1$ gerade oder ungerade ist. Infolgedessen stimmen auch die $\Sigma\varepsilon_\sigma$ und $\Sigma\varepsilon'_\sigma$, welche diesem Elementarteiler bezw. diesen Elementarteilern in den Normalformen entsprechen, überein. Bei Aufstellung der Bedingungen für die reelle Äquivalenz von φ, ψ und φ', ψ' kann also *die letzte Bedingung in C_1 durch die gleichwertige*

$$S(\psi-c_1\varphi)=S(\psi'-c_1\varphi')$$

ersetzt werden.

Setzen wir weiter voraus, daß

$$S(\psi-c_2\varphi)=S(\psi'-c_2\varphi')$$

ist und von den γ_2 Bedingungen C_2 — von denen Analoges gelte, wie von C_1 —, die γ_2-1 ersten erfüllt sind. Dann folgt, wie oben,

$$-u_1+u_3+u_4+\cdots+u_m+g_2=-u'_1+u'_3+u'_4+\cdots+u'_m+g'_2,$$

und wegen $u_1=u'_1$ hieraus und aus (23.)

$$\begin{aligned} u_2+u_3+\cdots+u_m &= u'_2+u'_3+\cdots+u'_m, \\ u_3+u_4+\cdots+u_m+g_2 &= u'_3+u'_4+\cdots+u'_m+g'_2. \end{aligned}$$

Unter vorstehenden Voraussetzungen ist demnach entweder $u_2=u'_2$ und somit $g_2=g'_2$, oder umgekehrt. Die letzte Bedingung von C_2 kann demnach durch die gleichwertige

$$S(\psi-c_2\varphi)=S(\psi'-c_2\varphi')$$

ersetzt werden, usw. Bei Aufstellung der Realitätsbedingungen können die letzten Bedingungen in $C_1, C_2, \dots C_{\tau-1}$ durch die gleichwertigen

$$S(\psi - c_\sigma \varphi) = S(\psi' - c_\sigma \varphi') \qquad (\sigma = 1, 2, \dots \tau - 1)$$

ersetzt werden.

Infolge der gemachten Voraussetzungen ist $u_1 = u_1'$, $u_2 = u_2'$, $\dots$ $u_{\tau-1} = u_{\tau-1}'$ und somit wegen (23.)

$$(25.) \qquad u_\tau + u_{\tau+1} + \dots + u_m = u_\tau' + u_{\tau+1}' + \dots + u_m'.$$

Nun stellen wir die der Wurzel c_m entsprechenden γ_m Realitätsbedingungen C_m auf und setzen die $\gamma_m - 1$ ersten als erfüllt voraus. Dann wird, wenn

$$S(\psi - c_m \varphi) = S(\psi' - c_m \varphi')$$

vorausgesetzt wird,

$$-u_1 - u_2 - \dots - u_{m-1} + g_m = -u_1' - u_2' - \dots - u_{m-1}' + g_m',$$

oder wegen $u_1 = u_1'$ usw.

$$(26.) \qquad u_\tau + u_{\tau+1} + \dots + u_{m-1} - g_m = u_\tau' + u_{\tau+1}' + \dots + u_{m-1}' - g_m',$$

und es muß, wie oben, wegen (25.) und (26.) entweder $u_m = u_m'$ und damit $g_m = g_m'$ sein, oder umgekehrt, usw. An die Stelle der letzten Bedingungen in $C_m, C_{m-1}, \dots C_{\tau+1}$ können als gleichwertig die Realitätsbedingungen

$$S(\psi - c_\sigma \varphi) = S(\psi' - c_\sigma \varphi') \qquad (\sigma = m, m-1, \dots \tau+1)$$

treten.

Infolge der seither gemachten Voraussetzungen ist noch

$$u_m = u_m', \quad u_{m-1} = u_{m-1}', \dots u_{\tau+1} = u_{\tau+1}'$$

und somit wegen (25.)

$$(27.) \qquad u_\tau = u_\tau'.$$

Setzen wir daher weiter

$$S(\psi - c_\tau \varphi) = S(\psi' - c_\tau \varphi')$$

voraus, so wird

$$\begin{aligned} -u_1 - u_2 - \dots - u_{\tau-1} + u_{\tau+1} + u_{\tau+2} + \dots + u_m + g_\tau \\ = -u_1' - u_2' - \dots - u_{\tau-1}' + u_{\tau+1}' + \dots + u_m' + g_\tau' \end{aligned}$$

oder

$$(28.) \qquad g_\tau = g_\tau'.$$

Sind nun — nach fallender Größe geordnet — die zur Basis $\lambda - c_\tau$ gehörigen Elementarteilerexponenten durch

$$e_1^{(\tau)} = \cdots = e_\alpha^{(\tau)} > e_{\alpha+1}^{(\tau)} = \cdots > \cdots > e_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\omega+1}^{(\tau)} = \cdots = e_\varrho^{(\tau)}$$

gegeben, und ist in dieser Zahlenreihe $e_\mu^{(\tau)}$ die zuletzt auftretende ungerade, $e_\nu^{(\tau)}$ die zuletzt auftretende gerade Zahl, so ist wegen (27.) von den Realitätsbedingungen C_τ (vergl. V. und VI.) die Bedingung

$$S(\Phi_{\eta_\mu}^{(\tau)}) = S(\Phi_{\eta_\mu}'^{(\tau)})$$

überflüssig und die Bedingung

$$S(\Phi_{\eta_\nu}^{(\tau)}) = S(\Phi_{\eta_\nu}'^{(\tau)})$$

kann wegen (28.) durch die Bedingung

$$S(\psi - c_\tau \varphi) = S(\psi' - c_\tau \varphi')$$

ersetzt werden.

Aus vorstehendem geht hervor, daß das System von Bedingungen für die reelle Äquivalenz von äquivalenten Formenpaaren, welches wir in Art. V. aufgestellt haben, *stets und zwar in verschiedener Weise durch ein gleichwertiges ersetzt werden kann.* Gehören z. B. zu gewissen reellen Basen Elementarteiler mit geraden und ungeraden Exponenten, so kann man oben unter $\lambda - c_\tau$ *irgend eine* dieser Basen verstehen. Man kann aber vorstehend auch annehmen, daß zu $\lambda - c_\tau$ nur gerade oder nur ungerade Elementarteilerexponenten gehören, wodurch die Entwicklungen leicht zu übersehende Modifikationen erfahren. Im praktischen Falle wird man eben die Realitätsbedingungen so wählen, daß diejenigen von der Gestalt (12.) *möglichst vermieden werden.*

VIII. Gehören zu einer reellen Basis $\lambda - c_\sigma$ nur Elementarteiler *mit demselben (geraden oder ungeraden) Exponenten*, so tritt nur *eine* dieser Basis entsprechende Bedingung C_σ auf (V.) und diese kann durch die gleichwertige

$$S(\psi - c_\sigma \varphi) = S(\psi' - c_\sigma \varphi')$$

ersetzt werden, falls sie nicht wegen $S(\varphi) = S(\varphi')$ überhaupt überflüssig ist (VII.). Also gilt der Satz:

h) *Haben die reellen Elementarteiler zweier äquivalenten Formenscharen* $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ *und* $\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi'$, *welche die verschiedenen Basen*

$$\lambda - c_1,\ \lambda - c_2, \ldots \lambda - c_m$$

besitzen, die Eigenschaft, daß zu gleichen Basen gleiche Exponenten gehören, und sind diese Exponenten nicht alle gerade, so sind die beiden Scharen dann und nur dann reell äquivalent, wenn die Bedingungen

$$S(\varphi)=S(\varphi'),\ S(\psi-c_\sigma\varphi)=S(\psi'-c_\sigma\varphi') \quad (\sigma=1,2,\ldots\tau-1,\tau+1,\ldots m)$$

erfüllt sind, wofern c_τ irgend eine der reellen Basen ist, zu der ungerade Elementarteilerexponenten gehören.

i) *Haben die reellen Elementarteiler zweier äquivalenten Scharen quadratischer Formen alle gerade Exponenten und die weitere Eigenschaft, daß zu gleichen Basen gleiche Exponenten gehören, so sind die beiden Scharen dann und nur dann reell äquivalent, wenn je zwei entsprechende reelle singuläre Formen aus ihnen gleiche Signaturen besitzen.*

k) *Haben die reellen Elementarteiler zweier äquivalenten Scharen reeller quadratischer Formen die Eigenschaft, daß zu einer Basis $\lambda-c_\tau$ Elementarteiler von der Gestalt*

$$(\lambda-c_\tau)^{2p},\ldots(\lambda-c_\tau)^{2p},\ (\lambda-c_\tau)^{2q+1},\ldots(\lambda-c_\tau)^{2q+1},$$

im übrigen aber zu gleichen Basen gleiche Exponenten gehören, so sind die beiden Scharen dann und nur dann reell äquivalent, wenn φ und φ' sowie je zwei entsprechende reelle singuläre Formen aus den Scharen $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'$ gleiche Signaturen haben.

Um die Richtigkeit des letzten Satzes einzusehen, braucht man nur unter $\lambda-c_\tau$ in VII. diese Basis $\lambda-c_\tau$ zu verstehen.

IX. Um unsere Untersuchungen auf Formenscharen auszudehnen, in welchen *beide Grundformen singulär* **sind, setzen wir (E. T. S. 83)**

$$(29.)\qquad \begin{cases} \lambda_1=g\lambda-g', \\ \lambda_2=h\lambda-h', \end{cases}$$

wo die reellen Zahlen g, h, g', h' so zu wählen sind, daß $|g\varphi+h\psi|\neq 0$ und $gh'-g'h=1$ ist. Sind dann $a_\sigma\lambda_1+b_\sigma\lambda_2$ $(\sigma=1,2,\ldots m)$ die verschiedenen reellen Linearfaktoren von $|\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi|$, so können wir uns die $a_\sigma|b_\sigma$ so gewählt denken, daß

$$(30.)\qquad a_\sigma g+b_\sigma h=1 \qquad (\sigma=1,2,\ldots m)$$

wird. Wegen (29.) hat man

$$\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi=\lambda(g\varphi+h\psi)-(g'\varphi+h'\psi)=\lambda\varphi_1-\psi_1,$$
$$\lambda_1\varphi'+\lambda_2\psi'=\lambda(g\varphi'+h\psi')-(g'\varphi'+h'\psi')=\lambda\varphi_1'-\psi_1'$$

und

$$a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2 = \lambda - (a_\sigma g' + b_\sigma h') = \lambda - c_\sigma. \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

Einem Elementarteiler $(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$ der äquivalenten Scharen $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ und $\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi'$ entspricht ein Elementarteiler $(\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma}$ von $|\lambda \varphi_1 - \psi_1|$ und $|\lambda \varphi_1' - \psi_1'|$. Aus der reellen Äquivalenz der Paare φ, ψ und φ', ψ' folgt diejenige der Paare φ_1, ψ_1 und φ_1', ψ_1', sowie umgekehrt. Über die reelle Äquivalenz der letzteren Paare können wir aber, da $|\varphi_1|$ und $|\varphi_1'|$ nicht Null sind, nach V., VII. und VIII. entscheiden. Wir haben dabei die reellen singulären Formen

$$\chi_\sigma = \psi_1 - c_\sigma \varphi_1, \; \chi_\sigma' = \psi_1' - c_\sigma \varphi_1' \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

in betracht zu ziehen. Nun ist aber

$$\psi_1 - c_\sigma \varphi_1 = - b_\sigma \varphi + a_\sigma \psi, \; \psi_1' - c_\sigma \varphi_1' = - b_\sigma \varphi' + a_\sigma \psi'.$$

Um daher bei $|\varphi| = |\varphi'| = |\psi| = |\psi'| = 0$ die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die reelle Äquivalenz der ordinären Scharen $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ und $\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi'$ aufzustellen, hat man oben an die Stelle von φ und φ' *irgend zwei entsprechende ordinäre Formen* $g\varphi + h\psi$ und $g\varphi' + h\psi'$ aus beiden Scharen, an die Stelle der Formen $\chi_\sigma, \chi_\sigma'$ *die reellen singulären Formen*

$$- b_\sigma \varphi + a_\sigma \psi, \quad - b_\sigma \varphi' + a_\sigma \psi'$$

treten zu lassen; im übrigen bleibt alles *unverändert* bestehen.*) Daher gelten die Sätze e) und i) *wörtlich* für beliebige ordinäre Scharen.

Die Determinante $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$ besitze die reellen Elementarteiler

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots k)$$

und die imaginären Elementarteiler

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}; \qquad (\sigma = k+1, \ldots l)$$

zu jedem Elementarteiler der letzteren Art $(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$, wo etwa

$$\frac{b_\sigma}{a_\sigma} = m_\sigma + \sqrt{-1}\, m_\sigma'$$

*) Dabei dürfen die homogenen Wertsysteme $a_\sigma | b_\sigma$ durch gleichwertige $\varrho a_\sigma | \varrho b_\sigma$ ersetzt werden, wo ϱ reell ist. Die Wahl der $a_\sigma | b_\sigma$ gemäß (30.) geschah, um die Rechnung hier und im folgenden zu vereinfachen.

ist, gehört ein konjugiert imaginärer $(a'_\sigma \lambda_1 + b'_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$, wo

$$\frac{b'_\sigma}{a'_\sigma} = m_\sigma - \sqrt{-1}\, m'_\sigma$$

ist. Denken wir uns jetzt die Basen der reellen Elementarteiler so gewählt, daß die $a_\sigma | b_\sigma$ die Gleichung (30.) befriedigen, so können wir — und zwar auf unendlich viele Arten — φ und ψ gleichzeitig reell auf die Gestalt

$$(3^b.)\quad \begin{cases} \Phi = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} [\varepsilon_\sigma a_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} - \varepsilon_\sigma h (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}] + J_1 = S_1 + J_1, \\ \Psi = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} [\varepsilon_\sigma b_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} + \varepsilon_\sigma g (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}] + J_2 = S_2 + J_2 \end{cases}$$

bringen, wo J_1 und J_2 reelle quadratische Formen von $\frac{l-k}{2} + k$ Variablen vorstellen, welche mit S_1 und S_2 keine Variable gemein haben. Die Elementarteiler von $|\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2|$ sind die imaginären Elementarteiler von $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$. Insbesondere können in $(3^b.)$

$$J_1 = 2U, \quad J_2 = 2V$$

werden, wo U und V die zweiten Summen rechts in (3.) bedeuten. (Vergl. E. T. S. 83 und 84, Artikel IV. oben und Satz a) in I.).

Verstehen wir nun unter s_σ Zahlen, die für die Formen Φ und Ψ in $(3^b.)$ analoge Bedeutung haben, wie die s_σ für die Formen Φ und Ψ in (3.) oder $(3^a.)$, *so gilt der Satz* f) *in* VI. *auch für die jetzigen Formen* $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$, vorausgesetzt, daß die Konstanten $g|h$ bei jeder Transformation nach $(3^b.)$ *dieselben* sind. Denn jede Substitution, welche φ und ψ gleichzeitig auf die Gestalt Φ und Ψ in $(3^b.)$ bringt, transformiert die Formen $\varphi_1 = g\varphi + h\psi$ und $\psi_1 = g'\varphi + h'\psi$ gleichzeitig in Formen von der Gestalt Φ, Ψ in $(3^a.)$; die reellen Elementarteiler von $|\lambda\varphi_1 - \psi_1|$ sind aber gleich

$$(\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots k)$$

und somit folgt die Richtigkeit unserer Behauptung sofort aus dem Satze f).

Ist φ', ψ' ein zu φ, ψ äquivalentes Formenpaar, so können und wollen wir bei der Transformation desselben in Formen Φ', Ψ' von der Gestalt $(3^b.)$ die Konstanten $g|h$ den vorhin gebrauchten gleich wählen. Alsdann definieren wir Zahlen s'_σ, welche den Zahlen s_σ analog sind, und zeigen ähnlich wie eben beim Beweise von f) für beliebige Scharen, mittels des

Satzes g), daß die Paare φ, ψ und φ', ψ' dann und nur dann reell äquivalent sind, wenn die Zahlen s_σ und s'_σ bezw. übereinstimmen. Also sind auch diese Zahlen s_σ *numerische Invarianten, und der Satz* g) *gilt m. m. für beliebige ordinäre Scharen.*

Schlußbemerkung.

Die allgemeinen Untersuchungen über die reelle Transformation von Scharen reeller quadratischer Formen finden wichtige geometrische Anwendung bei der Behandlung des reellen Kurven- oder Flächenbüschels II. Ordnung oder II. Klasse.

Der Spezialsatz c) in Artikel I. kann benutzt werden, um in Verbindung mit dem *Weierstraß-Gundelfinger*schen Theoreme 36, S. 180 und meinem Theoreme 38, S. 184 der E.T. die affine Klassifikation*) der Kurven und Flächen II. Ordnung und die äquiforme Klassifikation*) der Kurven und Flächen II. Klasse mittels der Elementarteiler vorzunehmen.

*) Vergleiche über diese Begriffe: *L. Heffter,* „Über das Lehrgebäude der Geometrie usw." Jahresberichte der D. M. V. (1903), Bd. XII, S. 490.

Band 128. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätstraße 54.







